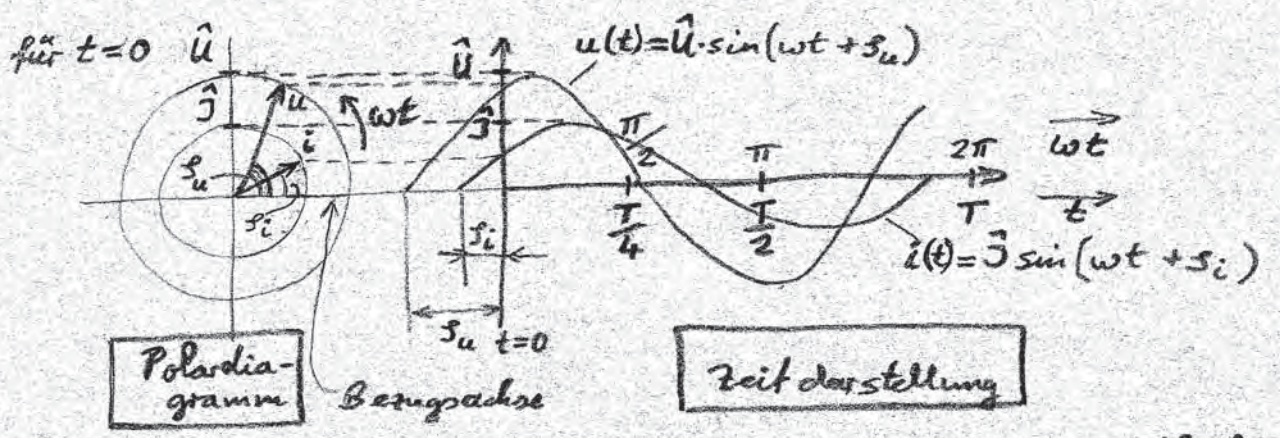
2014

Teil IV: Berechnung linearer Stromkreise bei sinusförmiger Erregung

Bekannte Kenngrößen der sin-Zeit-Funktion (Projektion drehender Zeiger):



es gilt: u, i – Momentanwerte (auch $u(t)$, $i(t)$), Zeitfunktion

U, J – Effektivwerte (auch $\tilde{U}$, $\tilde{J}$) der Wechselgröße

$\hat{U}, \hat{J}$ – Max.-werte, Scheitelwerte, Amplituden (i.a. positiv def.)

$\alpha = \omega\cdot t + \varphi$ – Phasenwinkel, Umr.: φ (in Bogenmaß "RAD") $= \frac{\pi}{180°}\cdot\varphi(°)$ "DEG"

φ_u, φ_i – Nullphasen ∡

T – Periodendauer

$f = \frac{1}{T}$ – Frequenz $[f] = 1\,Hz$

$\omega = 2\pi f$ – Kreisfrequenz $[\omega] = s^{-1}$, $\omega T = 2\pi$
(Winkelgeschwindigkeit)

Für die Beschreibung von teilw. komplizierten zeitabhängigen periodischen Fktnen sind zeitliche Mittelwerte gebräuchlich.

↓ folg. Kennwerte eingeführt:

α) Arithmetischer Mittelwert (=Gleichwert, =linearer Mittelwert)

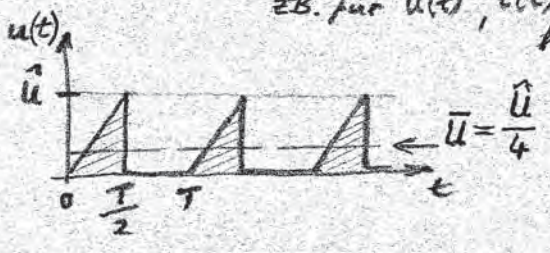
Def.:

$$\boxed{\bar{x} = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} x(t)\cdot dt}$$

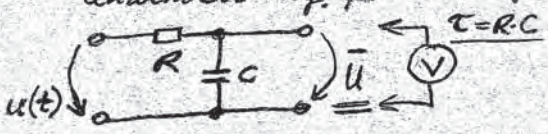
zB. für $u(t)$, $i(t)$...

≙ Vorzeichenbehafteter Fläche pro Periodendauer T
(vgl.: für sin-Fktn. wird $\bar{U}=0$)

zB:



hierzu: **Analoger Mittelwertbildner!**
anwendbar allg. für $\tau \gg T$:



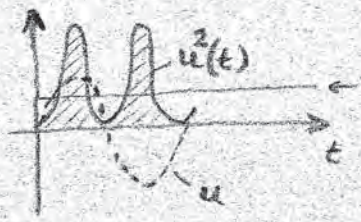
b.) Effektivwert (=quadratischer Mittelwert, engl.: RMS = root mean square)

Def.: $$\boxed{\tilde{x} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} x^2(t)\cdot dt}}$$

Sog. "Echte Effektivwert"-meßgeräte (True RMS) quadrieren, integrieren, radizieren für $\tilde{x}$!
einfache Meßgeräte werden für sin-Fktn. aus c.) kalibriert.

(zB:) für Sinusfunktion wird:

$$\tilde{u}^2 = \frac{1}{T}\int_0^T \left[\hat{u}\cdot\sin(\omega t+\varphi)\right]^2\cdot dt = \frac{\hat{u}^2}{T}\int_0^T \frac{1-\cos 2(\omega t+\varphi)}{2}\,dt$$



$$= \frac{\hat{u}^2}{2}$$

$$\text{Eff.-wert } \tilde{u} = \frac{\hat{u}}{\sqrt{2}} \approx 0{,}707\,\hat{u}$$

(!) **Der Effektivwert** einer Wechselspannung $\tilde{u}$ entspricht derjenigen Gleichspannung $U_=$, die an einem Ohmschen Widerstand gemittelt über die Zeit T die **gleiche Wirkleistung** erzeugt, dh. $P = \frac{U_=^2}{R} = \frac{\tilde{u}^2}{R}$ (entspr. für I)

Bem: es gilt $P \sim \tilde{u}^2$ (quadratischer Zusammenhang)

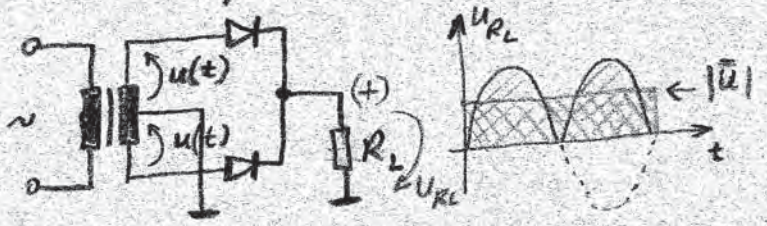
c.) Gleichrichtwert

Def.: $$\boxed{|\bar{x}| = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} |x(t)|\cdot dt}$$

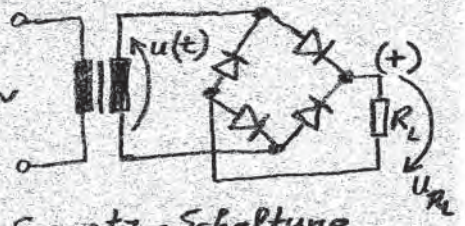
= linearer Mittelwert des Betrages (dh. nach Gleichrichtung)

(zB:) für sin-Fktn: $|\bar{u}| = \frac{2\hat{u}}{\pi} \approx 0{,}64\,\hat{u}$ (und $\tilde{u} = |\bar{u}|\cdot 1{,}111$ als Kalibrierbeziehung)

wird erzeugt mit Gleichrichterschaltung und nachfolgender Mittelwertbildung



oder:



Zweiweggleichrichter (Vorauss. ideale Dioden)

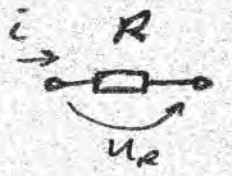
Graetz-Schaltung

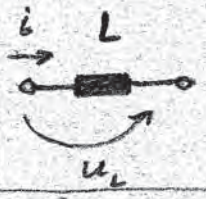
außerdem gilt für die reine sin-Fktn:

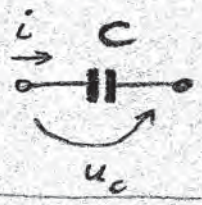
$$|\bar{u}| = 2\cdot\frac{1}{T}\int_0^{T/2} |u(t)|\cdot dt$$

dh. nur Integration über $\frac{T}{2}$ wäre auszuführen

Schaltelemente R, L, C an Wechselspannung







$\int \sin ax \cdot dx = -\frac{1}{a}\cos ax$

$\frac{d}{dt}(\sin ax) = a \cdot \cos ax$

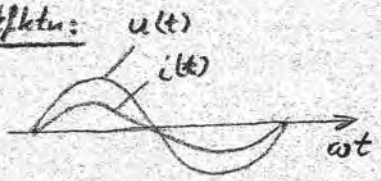
mit der Strom-Spannungs-Beziehung

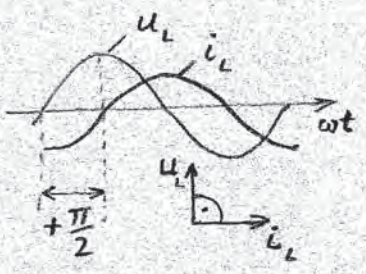
$u_R = R \cdot i$	$u_L = L\,\frac{di}{dt}$	$u_C = \frac{1}{C}\int i\,dt$

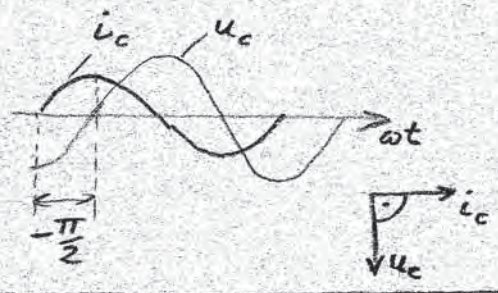
z.B.: ein ein gespeister Strom $i = i(t) = \hat{J}\sin(\omega t + \varphi_i)$ liefert:

$u_R = R \cdot \hat{J}\sin(\omega t + \varphi_i)$	$u_L = \omega L\,\hat{J}\sin\left(\omega t + \varphi_i + \frac{\pi}{2}\right)$ wegen: $\left[\cos(\omega t + \varphi) = \sin\left(\omega t + \varphi + \frac{\pi}{2}\right)\right]$	$u_C = \frac{1}{\omega C}\hat{J}\sin\left(\omega t + \varphi_i - \frac{\pi}{2}\right)$ wegen: $\left[-\cos(\omega t + \varphi) = \sin\left(\omega t + \varphi - \frac{\pi}{2}\right)\right]$
↷ Amplitude der Spannung: $\hat{U}_R = R \cdot \hat{J}$ bzw. Effektivwert: $U_R = R \cdot J$	$\hat{U}_L = \omega L \cdot \hat{J}$ $U_L = \omega L \cdot J$	$\hat{U}_C = \frac{1}{\omega C} \cdot \hat{J}$ $U_C = \frac{1}{\omega C} \cdot J$
Phasenvergleich $\varphi_u = \varphi_i$ dh. u, i "in Phase"	$\varphi_u = \varphi_i + \frac{\pi}{2}$ "u_L eilt 90° vor"	$\varphi_u = \varphi_i - \frac{\pi}{2}$ "u_C eilt 90° nach"

Zeitfktn:







Zeigerbild: $\xrightarrow{i}$ u

Def: Scheinwiderstand $\boxed{Z = \frac{\hat{U}}{\hat{J}} = \frac{U}{J}}$ Amplit. Eff.wert

wobei $Z = |\underline{Z}|$, = Wert ohne Phaseninfo., aus unabhängiger U-, J-Messung!

Phasenverschiebung zw. Spannung und Strom $\boxed{\varphi_Z = \varphi_u - \varphi_i}$

φ_Z stellt dar: ∢ u bezogen auf i

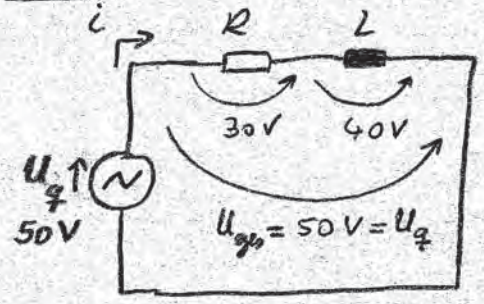
damit gilt für

R:	L:	C:
$Z_R = \frac{U}{J} = R$	$Z_L = \omega L$	$Z_C = \frac{1}{\omega C}$
$\varphi_R = 0$	$\varphi_L = +\frac{\pi}{2}$	$\varphi_C = -\frac{\pi}{2}$

Bem: Z_C, Z_L auch: "Blindwid." für ideale L, C

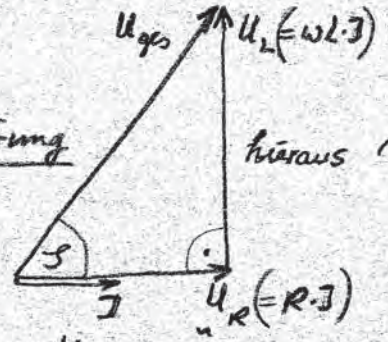
Einfaches Beispiel zur erforderl. Berücksichtigung der Phasenverhältnisse:

geg:



Bei sin-förm. Strom $i(t) = \hat{J} \cdot \sin \omega t$ wird jeweils mit Wechselspannungsmesser U_R u. U_L gemessen: (Effektivwerte)

bei: $J = 1A$, $R = 30\Omega$, $\omega L = 40\Omega$ ⇝ eingezeichnete Spannungsabfälle U_R und U_L entstehen, deren Σ offenbar $> U_{ges}$!



Erklärung durch das "Zeigerdiagramm" (stellt Beträge und Phasen ∡ dar)

hieraus ⇝ $U_{ges} = \sqrt{U_R^2 + U_L^2} = \sqrt{(R \cdot J)^2 + (\omega L \cdot J)^2}$

$= J \cdot \sqrt{R^2 + (\omega L)^2} = J \cdot Z_{ges} = 50V$

mit Scheinwiderstand $Z_{ges} = 50\Omega$

$\tan \varphi = \frac{U_L}{U_R} = \frac{\cancel{J} \cdot \omega L}{\cancel{J} \cdot R}$ ⇝ $\varphi = \arctan \frac{\omega L}{R} = 53{,}1°$

Die Berechnung nach Kirchhoff'schen Sätzen führt auf Differenzialgleichung (DGL) 1. Ordnung: (!)

$$u_R + u_L = u_q$$

$$R \cdot i + L \frac{di}{dt} = u_q$$

⇒ Lösung durch Trennung der Variablen, Variation der Konstanten, partikuläres Integral ... u.a. Teilschritte.

Hinweis: alle elektr. u. magnetischen Größen müssen sin-förmig sein mit der Frequenz von U_q!

letztlich ist für E-Technik allgem. nur Berechng. von Amplitude u. Phase bei harmonischen u, i-Verläufen erforderl., wenn R, L, C bekannt!

Dieser Weg wird bei mehreren Speicherelementen (L, C) schnell sehr kompliziert in der Lösung!!
(denn die Ordng. der DGL ist durch Anzahl der Speicherelemente bestimmt)

Deshalb erfolgt Übergang zur Nutzung der "komplexen Rechnung"!

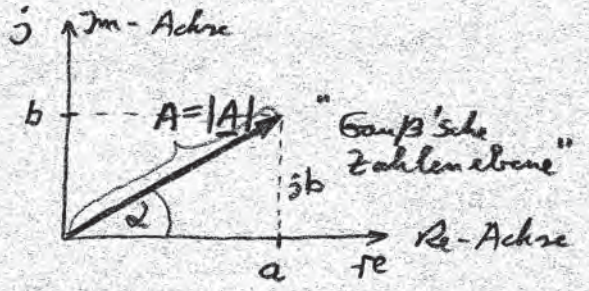
Einführung der komplexen Rechnung in der Wechselstromtechnik

nutzt die Eigenschaften der komplexen Zahlendarstellung für Betrags u. Phasen∡-berechnung in der Elektrotechnik für sin-/cos-förmige Signalform.
Als Einstieg in die Betrachtung erford. Verständnis der Zeigerdarstellung:

$\boxed{\text{Zeiger}}$ ≙ gerichteter Strecke, Aufsatzpkt. im Koordinatenursprung!
Darstellung wie Vektor in 2 Komponenten

mit Festlegung, daß die Komponenten in die Gauß'sche Zahlenebene gelegt werden!

dh. Zerlegung in Realteil u. Imaginärteil (Komponenten) einer komplexen Zahl:



zur Unterscheidung geg. el. Strom i:
j (Elektrotechnik)
$= i$ (Mathematik)
$= +\sqrt{-1}$ imaginäre Einheit
$\sqrt{-a} = j\sqrt{a}$

Darstellung komplexer Größen:

$$\underline{A} = a \pm j \cdot b = Re\{\underline{A}\} \pm j \cdot Im\{\underline{A}\}$$ $\boxed{\text{Arithmetische Form}}$

$$\underline{A} = A(\cos\alpha \pm j \cdot \sin\alpha)$$ $\boxed{\text{Trigonometrische Form}}$

Euler'sche Beziehung: $\cos\alpha + j \cdot \sin\alpha = e^{j\alpha}$

$$\underline{A} = A \cdot e^{\pm j\alpha}$$ $\boxed{\text{Exponential-Form}}$

- Betrag der kompl. Zahl $\underline{A}$:

$$|\underline{A}| = A = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{(Re\{\underline{A}\})^2 + (Im\{\underline{A}\})^2}$$

- Phasen∡:

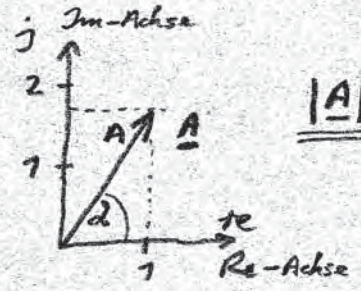
$$\alpha = \arctan \frac{b}{a} = \arctan \frac{Im\{\underline{A}\}}{Re\{\underline{A}\}}$$

Das vorgesetzte j ≙ geometrisch einer Drehung des folg. Anteils um $+90°$

Die Glieder a und b sind völlig verschiedene Größen, damit ist keine skalare Addition möglich!
a und b werden um 90° "phasengedreht" in der Gauß'schen Zahlenebene dargestellt.

⇒ Im Folgenden wird die komplexe Rechnung genutzt (Funktional-transformation), um 90°-Phasenverschiebung an L und C für elektr. Größen einfach verrechnen zu können ...

Beispiel, <u>geg:</u> $\underline{A} = 1 + j\sqrt{3}$



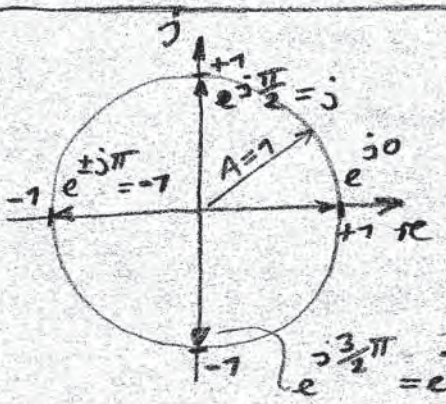
$$\underline{\underline{|\underline{A}| = A}} = \sqrt{1 + (\sqrt{3})^2} = \underline{\underline{2}}$$ Betrag

$$\tan\alpha = \frac{\sqrt{3}}{1} \rightsquigarrow \underline{\underline{\alpha = 60°}}$$ Phasenwinkel

$$\underline{A} = 2(\cos 60° + j \sin 60°)$$ $\boxed{\text{trigon. Form}}$

$$\underline{A} = 2 \cdot e^{j60°} = 2 \cdot e^{j\frac{\pi}{3}}$$ $\boxed{\text{Exp. Form}}$

<u>Überblick zu Phasenwinkel aus Einheitszeigern:</u>



hier ist $|\underline{A}| = 1$ (Kreisradius)

mit j erweitern

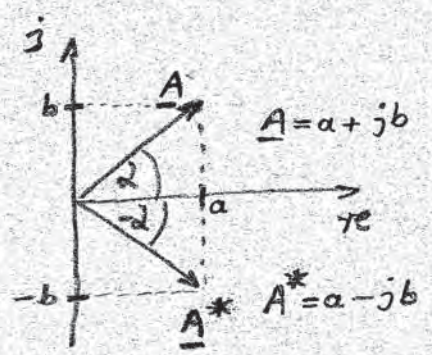
weil: $\frac{-j \cdot j}{j} = \frac{-j^2}{j} = \frac{-(-1)}{j} = \underline{\underline{\frac{1}{j}}}$

$$\rightsquigarrow \quad e^{-j\frac{\pi}{2}} = \boxed{-j = \frac{1}{j}}$$

Division durch j = Multiplikation mit −j
≙ Rückwärtsdrehung des Zeigers um 90°

$$\rightsquigarrow \quad e^{\pm j\pi} = \boxed{j^2 = -1}$$

<u>Konjugiert komplexe Größe $\underline{A}^*$:</u>



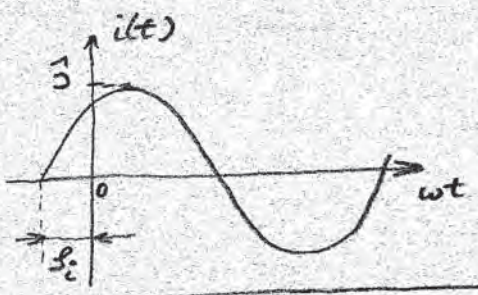
$\underline{A}^*$ hat neg. Im-Anteil! gegenüber $\underline{A}$

es gilt: $\boxed{\underline{A} \cdot \underline{A}^* = A^2 = a^2 + b^2}$

da: $A e^{j\alpha} \cdot A e^{-j\alpha}$
$= A^2 e^{j(\alpha - \alpha)}$
$= A^2 e^{j0}$
$= \underline{\underline{A^2 = a^2 + b^2}}$

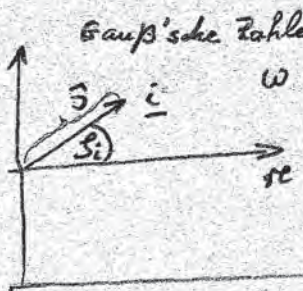
⟹ Multiplikation einer kompl. Größe mit ihrer konjugiert kompl. Größe ergibt das Quadrat ihres Betrages, also eine <u>reelle Größe!</u>
(wichtig für das "<u>Reellmachen</u>" von kompl. Nennern durch Erweiterung mit $\underline{A}^*$)

Die "Symbolische Methode" der Elektrotechnik



Zeitfunktion (Original)

Transformation ⟹ = Funktionaltransformation!



Gauß'sche Zahlenebene
ω ist bekannt!

Bildfunktion (Komplexe Darst.)

$$i(t) = \hat{J}\cdot\sin(\omega t+\varphi_i) \xrightarrow[\text{durch Hinzufügen einer Ergänzung}]{\text{Transformation}} \underline{i}(t) = \hat{J}\left[\underbrace{\cos(\omega t+\varphi_i)}_{\text{! Ergänzung !}} + j\cdot\underbrace{\sin(\omega t+\varphi_i)}_{\hat{=}\text{ zeitl. Momentanwert}}\right]$$

Transformation:

Mit der EULER-Beziehung
$\cos\varphi + j\cdot\sin\varphi = e^{j\varphi}$
ist der komplexe Momentanwert darstellbar: $\underline{i}(t) = \hat{J}\cdot e^{j(\omega t+\varphi_i)}$ $\hat{=}$ "Umlaufendem Zeiger"

Nach Streichung der Frequenzinformation: $\underline{i} = \hat{J}\cdot \cancel{e^{j\omega t}}\cdot e^{j\varphi_i}$
ergibt sich die Darstellung für den "Ruhenden Zeiger":

$$\underline{i} = \hat{J}\cdot e^{j\varphi_i}$$ $\hat{=}$ "Ruhendem Zeiger"

Dieser wird allg. zur Darst. harmon. Fktn. in der E-Technik angewendet!
Zur Rechnung ist die Zeit- und Frequenzinformation nicht erforderlich, diese gilt als Parameter der Darstellung, da die gleiche Frequenz im gesamten Netzwerk vorliegt.

Ergebnis:

Die Darstellung $\boxed{\underline{i} = \hat{J}\cdot e^{j\varphi_i}}$ ist entstanden aus einem mit konstanter Winkelgeschwindigkeit $\omega = \frac{d\alpha}{dt}$ umlaufenden Zeiger $\underline{i}(t)$. Die Kreisfrequenz ω (wobei $\alpha = \omega t + \varphi_i$) ist Parameter. Damit ist diese Darst. das Abbild der sin-Funktion, also sog. "Ruhender Zeiger".

(!) Jetzt möglich Vergleich mit DGl-Ausdrücke, erforderl. zur Lösung war:

- Differentiation nach der Zeit: $\frac{d\,\underline{i}(t)}{dt} = j\omega\cdot\hat{J}\,e^{j(\omega t+\varphi_i)} = j\omega\cdot\underline{i}(t)$

  das j bewirkt eine Zeigerdrehung um +90°

es gilt: $\frac{d}{dx}\left(e^{ax}\right) = a\cdot e^{ax}$

- Integration: $\int \underline{i}(t)\,dt = \frac{1}{j\omega}\cdot\hat{J}\cdot e^{j(\omega t+\varphi_i)} = \frac{1}{j\omega}\,\underline{i}(t)$

  $\frac{1}{j}$ bewirkt eine Zeiger-(rück)Drehung um −90°

es gilt: $\int e^{ax}\cdot dx = \frac{e^{ax}}{a}$

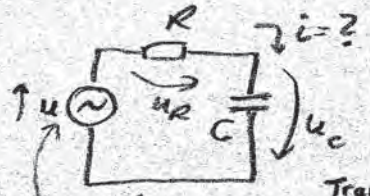
Dh.: In den komplexen Ausdrücken können die
- Differentialquotienten $\frac{d\ldots}{dt}$ durch $j\omega$ und die
- Integrale $\int \ldots dt$ durch $\frac{1}{j\omega} = -\frac{j}{\omega}$

ersetzt werden!

⇒ Aus Integral-/Differentialgleichung ergibt sich im Bildbereich eine komplexe algebraische Gleichung, die sich leicht nach der gesuchten Größe (zB. $\underline{i}$) auflösen läßt!

Beispiel für Bestimmung von $\underline{i}$ und $i(t)$ ohne Lsng. der DGL:

geg:



mit $u(t) = \hat{U}\cdot\sin(\omega t + \varphi_u) \xRightarrow{\text{Transf.}} \underline{u} = \hat{U}\cdot e^{j(\omega t+\varphi_u)}$

Zunächst Aufstellen der DGL; Einsetzen der SSB:

$$u_R + u_C = u \quad \text{(Maschengleichg.)}$$

$$R\cdot i + \frac{1}{C}\int i\,dt = \hat{U}\cdot\sin(\omega t + \varphi_u)$$

jetzt keine Lösung DGL

⇓ **Transf. ins Komplexe**

Ersetzen der diff. Ausdrücke: $R\cdot\underline{i} + \frac{1}{j\omega C}\cdot\underline{i} = \hat{U}\cdot e^{j(\omega t+\varphi_u)}$

Jetzt algebraische Umformung nach $\underline{i}$:

$$\underline{i} = \frac{\hat{U}\cdot e^{j(\omega t+\varphi_u)}}{R - j\cdot\frac{1}{\omega C}} = \frac{\hat{U}\cdot e^{j(\omega t+\varphi_u)}}{\sqrt{R^2+\left(\frac{1}{\omega C}\right)^2}\cdot e^{j\psi}}$$

und Umwandlg. des Nenners in die Exp.-Form sowie Zusammenfassen liefert die

wobei $\psi = \arctan\frac{\mathrm{Im}\{N\}}{\mathrm{Re}\{N\}} = -\arctan\frac{1}{\omega CR}$

Lösung im Komplexen

$$\underline{i} = \frac{\hat{U}}{\sqrt{R^2+\left(\frac{1}{\omega C}\right)^2}}\cdot e^{j(\omega t+\varphi_u-\psi)}$$

Phasen∡ der R-C-Schaltung

Phasen∡ der Quellspng.

⇓ nun Rücktransformation um wieder die Darst. der Zeitfktn. zu erhalten

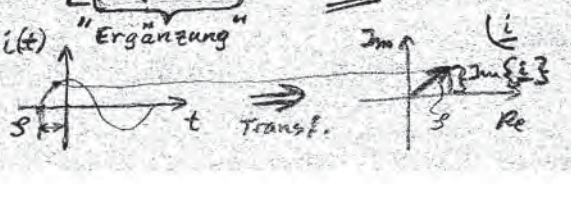
Lösung im Zeitbereich

$$i(t) = \mathrm{Im}\{\underline{i}\} = \underbrace{\frac{\hat{U}}{\sqrt{R^2+\left(\frac{1}{\omega C}\right)^2}}}_{\text{Betrag } |\underline{i}| = \text{Amplitude } \hat{I}}\cdot\sin\left(\omega t + \varphi_u + \arctan\frac{1}{\omega CR}\right)$$

für $u(t)$ angesetzte sin-Funktion hier wieder einsetzen!

Bem: Der zeitl. Momentanwert steckt im Im-Anteil!

denn es war $\underline{i}(t) = \hat{I}\left[\underbrace{\cos(\omega t+\varphi)}_{\text{"Ergänzung"}} + j\cdot\sin(\omega t+\varphi)\right]$ transformiert worden



hier an den um laufenden Zeiger denken

Einführung eines Widerstandsoperators

Die Aufstellung einer DGL im Zeitbereich, Transformation, algebraische Lösung u. anschl. Rücktransformation können gespart werden!

Es ist das Rechnen mit Widerstandsoperatoren sofort im Bildbereich mgl.:

Def: $$\boxed{\underline{Z} = \frac{\underline{u}}{\underline{i}} = \cancel{\frac{\hat{u}\cdot e^{j(\omega t+\varphi_u)}}{\hat{\jmath}\, e^{j(\omega t+\varphi_i)}}} = \frac{\hat{u}\cdot e^{j\varphi_u}}{\hat{\jmath}\cdot e^{j\varphi_i}}}$$

f(t) unzweckmäßige Darstellung! Sinnvollere Darst.

- Komplexer Widerstand = Impedanz: $\boxed{\underline{Z} = \frac{\hat{u}}{\hat{\jmath}}\cdot e^{j(\varphi_u-\varphi_i)} = \frac{\hat{u}}{\hat{\jmath}}\cdot e^{j\varphi_z}}$ bzw. Effektivwerte-Verhältnis
- Betrag des kompl. Wid. = Scheinwiderstand = Wechselstromwid. $|\underline{Z}| = Z = \frac{\hat{u}}{\hat{\jmath}} = \frac{u}{\jmath}$ als Widerstandswert ohne Phaseninformation
- Phasenwinkel (von $\underline{Z}$) $\varphi_z = \varphi_u - \varphi_i$ gilt für $\underline{Z}$: Spannung bezogen auf den Strom

Die Widerstandsoperatoren für R, C, L und die Zeigerbilder für $\underline{u}$, $\underline{i}$

R	C	L
$\underline{Z}_R = R$	$\underline{Z}_C = \frac{1}{j\omega C} = -j\frac{1}{\omega C}$	$\underline{Z}_L = j\omega L$
$\varphi_R = 0$	$\varphi_C = -\frac{\pi}{2}$	$\varphi_L = +\frac{\pi}{2}$
Zeigerbild $\underline{u}$, $\underline{i}$ in Gaußscher Zebene	i um 90° voreilend gegenüber u	u um 90° voreilend gegenüber i

Die Nutzung dieser Wid.-Operatoren transformiert bereits die Schaltung in den Bildbereich! Dadurch vereinfacht sich der Lösungsweg deutlich:

1. Aufstellen des vollst. Gleichungssystems im Bildbereich (Kirchhoff'sche Gl., ... komplex!)
2. Auflösung nach gesuchter Größe im Bildbereich
3. Rücktransformation in die Zeitfunktion, falls gewünscht

Im Vergleich zur Gleichstromrechnung:
gelten auch hier die gleichen Rechenregeln wie: Strom-, Spannungsteiler, Gesamtwiderstände in Wid.- und Leitwertdarstellung!

Rechnen mit den Widerstands-/Leitwertoperatoren

Wid.-Operat.

$R: \quad \underline{Z}_R = R$

$L: \quad \underline{Z}_L = j\omega L$

$C: \quad \underline{Z}_C = \frac{1}{j\omega C} = -j\frac{1}{\omega C}$

Leitwert-Operator

$\underline{Y}_R = G = \frac{1}{R}$

$\underline{Y}_L = \frac{1}{j\omega L} = -j\frac{1}{\omega L}$

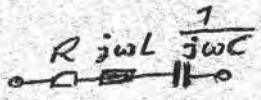
$\underline{Y}_C = j\omega C$

Beispiele: Komplexer Wid./-Leitwert, Betrag, Phasenwinkel

a)

Reihenschaltung

↳ Behandlung in kompl. Wid.-form $\underline{Z}$

$\xrightarrow{\text{Transf.}}$ wird 

Komplexer Widerstand:

$$\underline{Z} = R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C} = \underbrace{R}_{Re\{\underline{Z}\}} + j\underbrace{\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)}_{Im\{\underline{Z}\}} = R + j\cdot X \quad \boxed{\text{Arithm.}}$$

$$= |\underline{Z}|\cdot e^{j\varphi_Z} \quad \boxed{\text{Exp.F.}}$$

Betrag (= Scheinwid.)

$$|\underline{Z}| = \sqrt{\left(Re\{\underline{Z}\}\right)^2 + \left(Im\{\underline{Z}\}\right)^2}$$

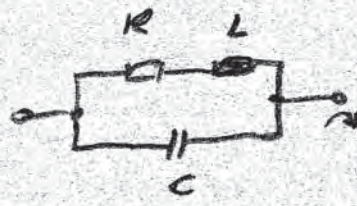
$$|\underline{Z}| = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}$$

$Re\{\underline{Z}\}$ = Wirkwiderstand

$Im\{\underline{Z}\}$ = Blindwiderstand

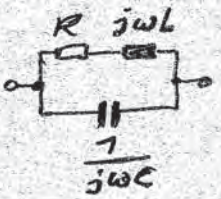
Phasen∡

$$\varphi_Z = \arctan\frac{Im\{\underline{Z}\}}{Re\{\underline{Z}\}} = \arctan\frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}$$

b.) 

Parallelschaltung

↳ Behandlung in kompl. Leitwert-form $\underline{Y}$

$\xrightarrow{\text{Transf.}}$ wird 

Aufteilen in 2 Komplexe Leitwerte:

Oberer Zweig $\quad \underline{Y}_1 = \frac{1}{\underline{Z}_1} = \frac{1}{R + j\omega L}$

Unterer Zweig $\quad \underline{Y}_2 = j\omega C$

gesamte Schaltung: $\quad \underline{Y} = \underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 = j\omega C + \frac{1}{R + j\omega L}$

$$= \frac{1 + j\omega C(R + j\omega L)}{R + j\omega L} = \frac{1}{\underline{Z}}$$

$$\curvearrowright \quad \underline{Z} = \frac{R + j\omega L}{1 + j\omega C(R + j\omega L)}$$

dh. einfache Umformung in kompl. Wid. mgl.

Nenner ausmultiplizieren

$$\underline{Z} = \frac{R + j\omega L}{1 - \omega^2 LC + j\omega CR} \qquad (*)$$

$j^2 = -1$

$$\underline{Z} = |\underline{Z}| \cdot e^{j\varphi_Z} = \frac{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2} \cdot e^{j\varphi_{Zähler}}}{\sqrt{(1-\omega^2 LC)^2 + (\omega CR)^2} \cdot e^{j\varphi_{Nenner}}}$$

hier werden Zähler und Nenner getrennt behandelt

$$\underline{Z} = \sqrt{\frac{R^2 + (\omega L)^2}{(1-\omega^2 LC)^2 + (\omega CR)^2}} \cdot e^{j\varphi_Z}$$

Exp.-Form zusammengefaßt

Ergebnis entsteht hier in der $\boxed{\text{Exponentialform}}$, dh. nach Betrag und Phasenwinkel

mit $\varphi_Z = \varphi_{Zähler} - \varphi_{Nenner}$

$$\varphi_{Zähler} = \arctan \frac{\omega L}{R}$$

$$\varphi_{Nenner} = \arctan \frac{\omega CR}{1 - \omega^2 LC}$$

(!) Eine andere Umformung liefert die Trennung in Real- und Imaginärteil von $\underline{Z}$:

$\boxed{\text{1. Weg:}}$ rechnerische Lsng. Ersetzen der Exp.-Form durch die trigonometr. Form, dh.

$$|\underline{Z}| \cdot e^{j\varphi} \rightarrow |\underline{Z}| \cdot (\cos\varphi + j \cdot \sin\varphi)$$

$\Rightarrow$ $Re\{\underline{Z}\}$ und $Im\{\underline{Z}\}$ ausrechnen...

analytische Lsng. mit

$\boxed{\text{2. Weg:}}$ "Reell-Machen" des Nenners von Gl. (*) durch Erweiterung mit dem konjugiert komplexen Nennerausdruck (!) vgl. S. 6 unten

$$\underline{Z} = \frac{(R + j\omega L)[(1-\omega^2 LC) - j\omega CR]}{(1-\omega^2 LC)^2 + (\omega CR)^2}$$

$j^2 = -1$

$$= \frac{R(1-\omega^2 LC) - j\omega CR^2 + j\omega L(1-\omega^2 LC) + \omega^2 LCR}{\text{Nenner}}$$

$$= \frac{R - \cancel{\omega^2 LCR} - j\omega CR^2 + j\omega L(1-\omega^2 LC) + \cancel{\omega^2 LCR}}{\text{Nenner}}$$

$$\underline{Z} = \frac{R + j[\omega L(1-\omega^2 LC) - \omega CR^2]}{(1-\omega^2 LC)^2 + (\omega CR)^2}$$

Ziel ist die Trennung nach Real- und Imaginärteil von $\underline{Z}$ bei reellem Nenner

$$\underline{Z} = \frac{R}{(1-\omega^2 LC)^2 + (\omega CR)^2} + j \cdot \frac{\omega L(1-\omega^2 LC) - \omega CR^2}{(1-\omega^2 LC)^2 + (\omega CR)^2}$$

Ergebnis entsteht hier in der $\boxed{\text{Arithmetischen Form}}$ dh. nach Real- und Imaginärantei

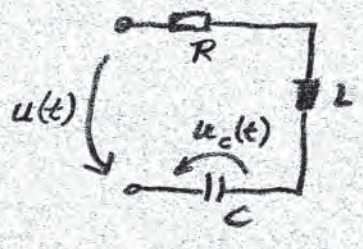
$$\underline{Z} = Re\{\underline{Z}\} + j \cdot Im\{\underline{Z}\}$$

(!)

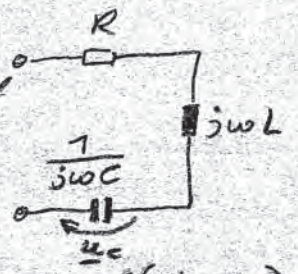
Bem: $Im\{\underline{Z}\}$ und $Re\{\underline{Z}\}$ sind i.a. $f(\omega)$, dh. frequenzabhängig

Beispiel zur Spannungsteilerregel mit Widerstandsoperatoren

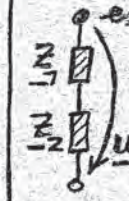
ges: $\underline{u}_c$ und $u_c(t)$



Wid. operat. $\Longrightarrow$



es gilt allgemein:



$$\frac{\underline{u}_1}{\underline{u}} = \frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2}$$

$$u(t) = \hat{U} \cdot \sin(\omega t + \varphi_u) \xrightarrow{\text{Transf.}} \underline{u} = \hat{U} \cdot e^{j(\omega t + \varphi_u)}$$

ωt wird zur besseren Anschaulichkeit der Rücktransformation in Zeitb. mitgeschrieben ...

$$\frac{\underline{u}_c}{\underline{u}} = \frac{\frac{1}{j\omega C}}{R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}}$$

Ansatz: Spannungsteilerregel im Komplexen (Bildbereich)

auflösen nach $\underline{u}_c$, Erweitern mit $j\omega C$, getrennte Betrachtg. v. Zähler u. N.

$$\underline{u}_c = \underline{u} \cdot \frac{1}{1 - \omega^2 LC + j\omega CR} = \frac{\hat{U} \cdot e^{j(\omega t + \varphi_u)}}{\sqrt{(1-\omega^2 LC)^2 + (\omega CR)^2} \cdot e^{j\varphi}}$$

$j \cdot j = -1$

(→ Exp. Form) $\underline{\underline{\varphi}} = \arctan \frac{\omega CR}{1 - \omega^2 LC}$

nach Zusammenfassen / Ordnen von Betrag und Phasen∡ entsteht die

Lösung im Komplexen

$$\underline{u}_c = \frac{\hat{U}}{\sqrt{(1-\omega^2 LC)^2 + (\omega CR)^2}} \cdot e^{j(\omega t + \varphi_u \underbrace{- \varphi}_{})}$$

Phasen∡ den die Schaltung für u_c erzeugt ist negativ

$\Downarrow$ Rücktransformation (zur Darst. der Momentanwerte) = Zeitfunktion $u_c(t)$

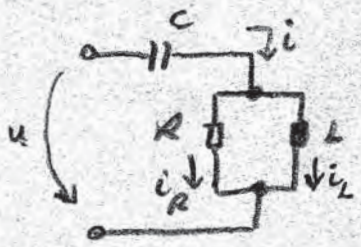
Lösung im Zeitbereich

$$u_c(t) = \mathrm{Im}\{\underline{u}_c\} = \underbrace{\frac{\hat{U}}{\sqrt{(1-\omega^2 LC)^2 + (\omega CR)^2}}}_{\hat{U}_c = \text{Amplitude}} \cdot \sin(\omega t + \varphi_u - \varphi)$$

Bem: Der Phasen∡ φ gibt hier (entsprechend Spannungsteileransatz für $\frac{\underline{u}_c}{\underline{u}}$) an, wie die Phasenlage von u_c bezogen auf u ist.
u_c eilt hier u nach!

Zweigstromanalyse, Stromteilerregel

Beispiel



ges: $\underline{i}_R$ und $i_R(t)$

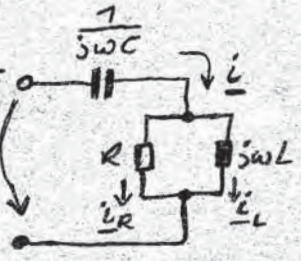
geg:

$$u(t) = \hat{U} \cdot \sin(\omega t + \varphi_u)$$

Trf. $\Downarrow$ $\underline{u} = \hat{U} \cdot e^{j(\omega t + \varphi_u)}$ rot. Zeiger

bzw. $\underline{u} = \hat{U} \cdot e^{j\varphi_u}$ ruhender Zeiger

Schaltungs-Transf. $\Longrightarrow$



- "Klassische" Methode hierzu war zB. die Zweigstromanalyse:

Sinnvoll hierbei, die Kirchhoffschen Glngen sofort im Komplexen anzugeben: (3 Zweige $\rightsquigarrow$ 3 unbek. Ströme z. lösng. damit 3 Gleichungen erf.)

Spannungs-bilanz:
$$\left.\begin{aligned} \underline{u}_C + \underline{u}_R &= \underline{u} \\ \underline{u}_L - \underline{u}_R &= 0 \end{aligned}\right\}$$

Stromknoten:
$$\underline{i}_L + \underline{i}_R = \underline{i}$$

$\Longrightarrow$ Einsetzen der Wid.-Operatoren (komplexe Strom-Spannungs-Beziehungen)

$$\begin{cases} \frac{1}{j\omega C} \cdot \underline{i} + R \cdot \underline{i}_R = \underline{u} & \text{(a)} \\ j\omega L \cdot \underline{i}_L - R \cdot \underline{i}_R = 0 & \text{(b)} \\ \underline{i}_L + \underline{i}_R = \underline{i} & \text{(c)} \end{cases}$$

im erhaltenen linearen algebraischen Gl.-System nun

$\Rightarrow$ (a) nach $\underline{i}$ und (b) nach $\underline{i}_L$ auflösen, einsetzen in (c) ...

$\rightsquigarrow$
$$\underline{i}_R = \frac{\underline{u}}{R\left(1 - \frac{1}{\omega^2 L C}\right) + \frac{1}{j\omega C}}$$

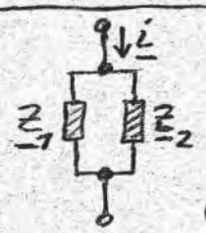
... Dies ist nur ein Beispiel für komplexes Rechnen in Gleichungssystemen

- (!) Lösung einfacher aus Stromteilerregel mit Widerst.-Operatoren:

Mögliche Ansätze:
$$\frac{\underline{i}_R}{\underline{i}_L} = \frac{j\omega L}{R} = \frac{\frac{1}{R}}{\frac{1}{j\omega L}} \quad \text{bzw.} \quad \frac{\underline{i}_R}{\underline{i}} = \frac{j\omega L}{j\omega L + R}$$

(Widerstände) (Leitwerte) (vereinfachte Stromteilerregel)

Es gilt allg. die Stromteilerregel im Bildbereich:



$$\frac{\underline{i}_1}{\underline{i}_2} = \frac{\underline{Y}_1}{\underline{Y}_2} = \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1} \quad \text{bzw.} \quad \frac{\underline{i}_1}{\underline{i}} = \frac{\underline{Z}_1 \| \underline{Z}_2}{\underline{Z}_1} = \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2}$$

(Teilstrom / Teilstrom) (Teilstrom / Gesamtstrom) mit vereinf. Stromteiler-Regel

Für Berechnung von $\underline{i}_R$ ist noch Angabe des Gesamtstroms $\underline{i}$ erforderl.

mit $\underline{Z}_{ges} = \frac{1}{j\omega C} + R \| j\omega L$ wird $\underline{i} = \frac{\underline{u}}{\underline{Z}_{ges}}$

$$\rightsquigarrow \quad \underline{i}_R = \underbrace{\frac{\underline{u}}{\frac{1}{j\omega C} + \frac{j\omega L R}{j\omega L + R}}}_{\underline{i}} \cdot \underbrace{\frac{j\omega L}{j\omega L + R}}_{\text{vereinf. Str.teiler}} = \frac{\underline{u} \cdot j\omega L}{\frac{L}{C} + j\left(\omega L R - \frac{R}{\omega C}\right)}$$

kürzen mit $j\omega L$:

$$\underline{i}_R = \frac{\underline{u}}{\frac{1}{j\omega C} + R\left(1 - \frac{1}{\omega^2 LC}\right)}$$

$\boxed{\text{Lösung im Komplexen}}$: getrennt Zähler und Nenner darstellen in Exponentialform:

$$\underline{i}_R = \frac{\hat{U} \cdot e^{j\varphi_u}}{\sqrt{R^2\left(1 - \frac{1}{\omega^2 LC}\right)^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2} \cdot e^{j\varphi_{Nenner}}}$$

u. Zusammenfassen der Phasen $\measuredangle$

$$\underline{i}_R = \frac{\hat{U} \cdot e^{j\varphi_u} \cdot e^{j(-\varphi_{Nenner})}}{\sqrt{\quad -\,''\,- \quad}}$$

$\Downarrow$ Rücktransformation

$\boxed{\text{Lösung im Zeitbereich}}$: $$i_R(t) = \mathrm{Im}\{\underline{i}_R\} = \frac{\hat{U}}{\sqrt{R^2\left(1 - \frac{1}{\omega^2 LC}\right)^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2}} \cdot \sin\left(\omega t + \varphi_u - \varphi_{Nenner}\right)$$

dabei neg. Vorzeichen für Phase des Nenners wegen $\frac{1}{j\omega C} = -j\frac{1}{\omega C}$ beachten: $\longrightarrow$ $\varphi_{Nenner} = \arctan \frac{-1}{\omega C R\left(1 - \frac{1}{\omega^2 LC}\right)}$

dh. $\varphi(i_R)$ ist positiv!

Zusammenfassung:

(!) Berech.-methoden der Wechselstromtechnik im Bildbereich sind die gleichen, wie für die Gleichstromtechnik im Originalbereich!

nur: – zeitabhängige Größen sind komplex
– für R, L, C Anwendung deren Operatoren

Es gilt: $\boxed{\underline{i} = \frac{\underline{u}}{\underline{Z}}}$ "Ohmsches Gesetz im Komplexen"

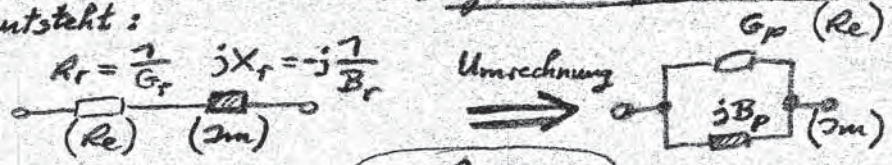
Damit wird die Berechng. von – komplex. Strömen, Spannungen
– komplex. Widerst./Leitwerten
– Spangs- u. Stromverhältnissen

ausführbar und zwar $\rightarrow$ ohne Anwendung von Diff.-gleichungen!

Umrechnung Parallelschaltung. ⟷ Reihenschaltung.

Die Ersatzschaltbildelemente sollen so umgerechnet werden, daß an den Klemmen <u>gleiches u/i-Verhalten</u> beider Schaltungen entsteht:

a.)



dh.: es sollen <u>äquivalente Schaltungen</u> für f = const. entstehen!

$\underline{Z} = R_r + jX_r$ ($\hat{=}$ L oder C) $\underline{Y} = G_p + j\cdot B_p$

Reihenschaltung ⟹ **Parallelschaltung**

Index r — Index p

R – Wirkwiderstand
X – Blindwiderstand
G – Wirkleitwert
B – Blindleitwert

es gilt: $\underline{Y} = \frac{1}{\underline{Z}} = \frac{1}{R_r + jX_r} \overset{!}{=} G_p + j\cdot B_p$

linke Seite mit konjugiert kompl. Wert des Nenners erweitern und nach Re- und Im-Anteil aufschreiben:

$$\frac{R_r}{R_r^2 + X_r^2} - j\,\frac{X_r}{R_r^2 + X_r^2} \overset{!}{=} G_p + j\cdot B_p$$

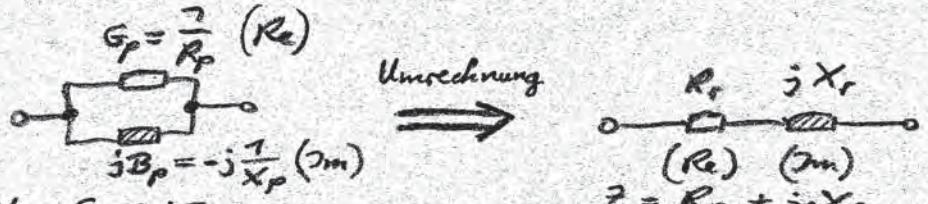
wobei $R_r^2 + X_r^2 = |\underline{Z}_r|^2 = (\text{Betrag})^2$

Ergebnis:

$G_p = \frac{R_r}{\lvert\underline{Z}_r\rvert^2}$	oder $R_r R_p = \lvert\underline{Z}_r\rvert^2$ wobei $G_p = \frac{1}{R_p}$
$B_p = -\frac{X_r}{\lvert\underline{Z}_r\rvert^2}$	oder $X_r X_p = \lvert\underline{Z}_r\rvert^2$ wobei $B_p = -\frac{1}{X_p}$

Jetzt folgt die Umwandlung <u>in umgekehrter</u> Richtung:

b.)



$\underline{Y} = G_p + j\cdot B_p$ $\underline{Z} = R_r + j\cdot X_r$

Parallelschaltung (p) ⟹ **Reihenschaltung** (r)

es gilt: $\underline{Z} = \frac{1}{\underline{Y}} = \frac{1}{G_p + jB_p} \overset{!}{=} R_r + j\cdot X_r$

wie oben mit konjugiert kompl. Nenner erweitern, ...

$$= \frac{G_p}{G_p^2 + B_p^2} - j\,\frac{B_p}{G_p^2 + B_p^2} = R_r + jX_r$$

wobei $G_p^2 + B_p^2 = |\underline{Y}_p|^2$

Ergebnis:

$R_r = \dfrac{G_p}{\lvert \underline{Y}_p \rvert^2}$	oder	$G_p G_r = \lvert \underline{Y}_p \rvert^2$ wobei $R_r = \dfrac{1}{G_r}$
$X_r = -\dfrac{B_p}{\lvert \underline{Y}_p \rvert^2}$	oder	$B_p B_r = \lvert \underline{Y}_p \rvert^2$ wobei $X_r = -\dfrac{1}{B_r}$

Beachte: Minus-Zeichen vor Blindkomponenten u. Vorzeichenumkehr beim Übergang: Blindleitwert $\Leftrightarrow$ Blindwiderstand

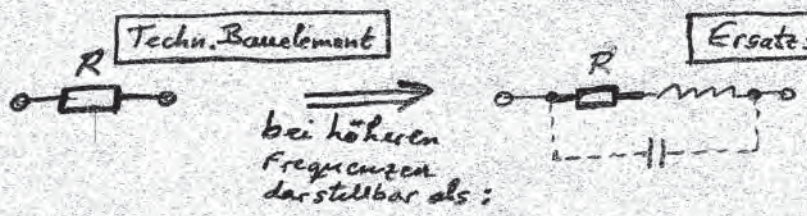
wegen $\underline{Z} = R + j \cdot X$ wird für X kapazitiv : $X_C = -\dfrac{1}{\omega C}$

und $\underline{Y} = G + j \cdot B$ —"— B induktiv : $B_L = -\dfrac{1}{\omega L} = -\dfrac{1}{X_L}$

dh. vor den Blindelementen ist das neg. Vz. (verbleibend aus der Reziprokwertbildung der komplexen Widerstandsoperatoren wegen $\dfrac{1}{j} = -j$) bei der Umrechnung zu berücksichtigen!

(!)

Technisch reale Bauelemente (nicht ideale Bauelemente)



mit der Darstellung der:
- Induktivität der Wendel
- Koppenkapazität

- Wicklungswiderstand + Wirbelstrom-/Ummagnetisierungsverluste
- Wicklungskapazität

- Verluste im Dielektrikum
- Zuleitungsinduktivitäten

Die Ersatzschaltbilder sind je nach techn. Gegebenheiten beliebig anpaßbar...

Kenngrößen für die technische Unvollkommenheit sind in 1. Näherung:
- Fehlwinkel δ und
- Verlustfaktor d bzw. Güte(faktor) $Q = \frac{1}{d}$

(eigentlich verteilte Parameter ↘ darstellbar durch Kettenleiterstruktur)

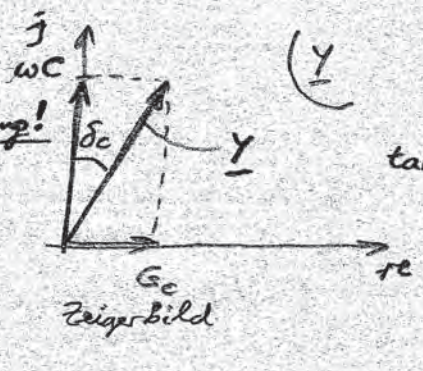
Technischer Kondensator:

ESB:

G_c (Verlustleitwert)

hierfür Leitwertbetrachtung!

$$\underline{Y} = G_c + j\omega C$$



δ_c - Fehlwinkel
d_c - Verlustfaktor

$$\tan\delta_c = \frac{G_c}{\omega C} = d_c = \frac{1}{Q_c}$$

Q_c - Güte(faktor)

Def.:

$$\boxed{\text{Verlustfaktor } d_c = \frac{\text{Wirkleistung } U^2 \cdot G_c}{\text{Blindleistung } U^2 \cdot \omega C}}$$

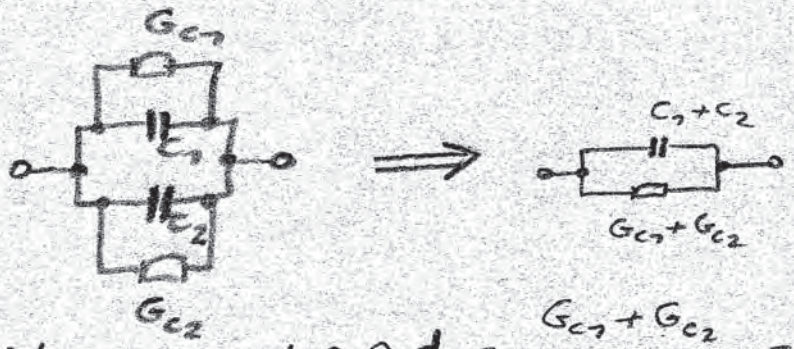
anzugeben bei Bezugsfrequenz ω_N bzw. f_N

Für Kondensatoren ist $d_c \approx 10^{-3} \ldots 10^{-4}$ dh. oft vernachlässigbar!

dh. $d_c = \tan\delta_c \approx \delta_c$ $\quad [\delta] = RAD$

G_c repräsentiert wesentlich Umpolarisierungsverluste des Dielektrikums, unwesentlich ist dessen Leitfähigkeit.

Zur Ber. des Verlustfaktors für Parallelschaltung zweier Kondensatoren:



d-Verlustfaktor

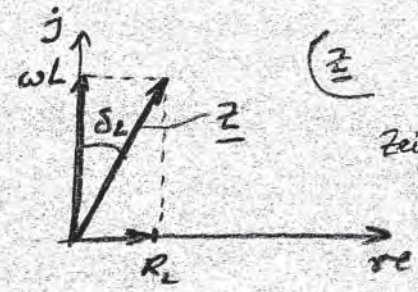
mit Addition der G_i und der C_i $\curvearrowright$ $d_C = \dfrac{G_{C_1}+G_{C_2}}{\omega(C_1+C_2)} = \dfrac{d_{C_1}\cdot C_1 + d_{C_2}\cdot C_2}{C_1+C_2}$

Technische Spule:

ESB:

$\underline{Z} = R_L + j\omega L$

hierfür Widerstandsbetrachtung!



Zeigerbild

Verlustfaktor $d_L = \tan\delta_L = \dfrac{R_L}{\omega L} = \dfrac{1}{Q_L}$ für $\omega = \omega_N$

Fehlwinkel $\quad$ Q_L – Güte(faktor)

(vgl. Leistungsbetrachtung: $d_L = \dfrac{J^2\cdot R_L}{J^2\cdot \omega L} = \dfrac{\text{Wirkleistung}}{\text{Blindleistung}}$) anzugeben bei Bezugsfrequenz ω_N

Bei Spulen ist R_L meist nicht vernachlässigbar!

R_L repräsentiert Wicklungs(draht)widerstand und Ummagnetisierungsverluste des mgn. Materials ($\sim f^2$).

Die Größen δ, d bzw. Q kennzeichnen die vom idealen Phasen $\measuredangle$ 90° abweichenden nichtidealen Eigenschaften von technischen L und C!

Wechselstromleistung

- Gleichstromleistung: $P = U \cdot I = R \cdot I^2 = \frac{U^2}{R}$ (als konstante Gleichgrößen)
- Wechselstromleistung: $p(t) = u(t) \cdot i(t)$ wobei $u(t)$, $i(t)$ sin-förmige Wechselgrößen!

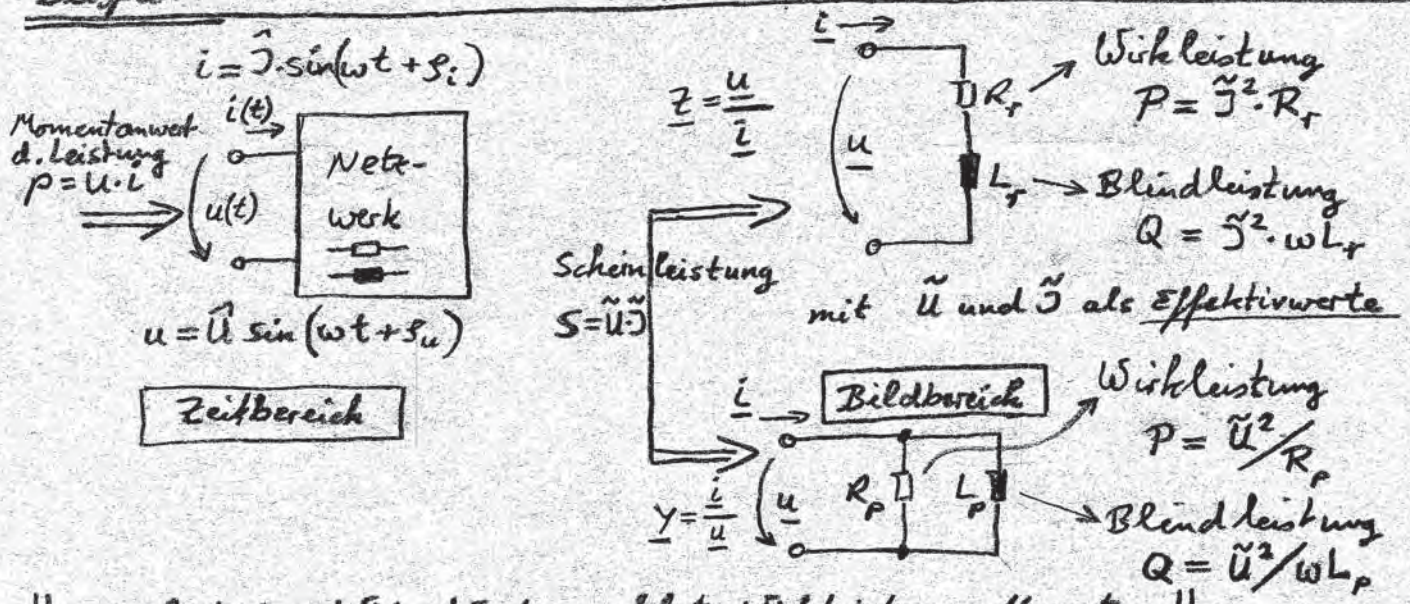
  hier ist $p(t)$ der Momentanwert der Leistung

  praktisch unhandliche Zeitfunktion

↳ erf. Einführung neuer Leistgskenngrößen wegen des elektromagnetischen Speicherverhaltens von L, C!
(bei Gleichstrom wirkt nur R!)

Def. von:
- Wirkleistung P an ohmschen R (zB. als Wärmeabgabe).
- Blindleistung Q infolge zeitweiliger Energiespeicherung, dh. "Energiependelung" durch L, C
- Scheinleistung S als reine Rechengröße bestehend aus Blind- und Wirkleistung

Beispiel: ohm'sch-induktiver Zweipol als Reihen- oder Parallelersatzschaltung:



An ohmschen Widerständen erfolgt Wirkleistungs-Umsatz
An Blindwiderständen L, C erf. Blindleistungs-Umsatz

Momentanwert der Leistung

$$p(t) = u(t) \cdot i(t) = \hat{U} \cdot \hat{I} \cdot \sin(\omega t + \varphi_u) \cdot \sin(\omega t + \varphi_i)$$

mit Additionstheorem: $\sin x \cdot \sin y = \frac{1}{2}\left[\cos(x-y) - \cos(x+y)\right]$

wird $$p(t) = \frac{\hat{U} \cdot \hat{I}}{2}\left[\cos(\varphi_u - \varphi_i) - \cos(2\omega t + \varphi_u + \varphi_i)\right]$$

mit $\frac{\hat{U}\hat{J}}{2} = \frac{\tilde{U}\sqrt{2}\cdot\tilde{J}\sqrt{2}}{2} = \tilde{U}\cdot\tilde{J}$ (Effektivwerte)

$= \underline{\underline{U\cdot J}}$ ← Schreibweise für Effektivwerte wird im Folgenden nicht weiter indiziert!

und $\varphi = \varphi_u - \varphi_i$

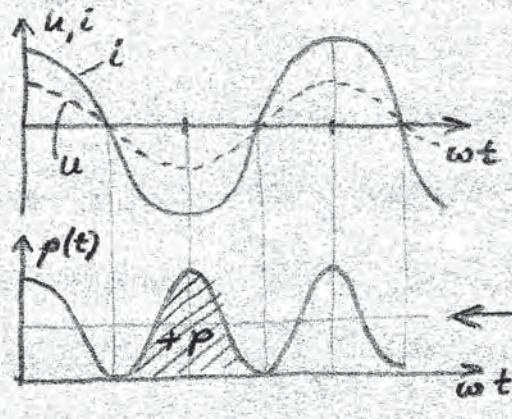
$$\underline{\underline{p(t)}} = \underbrace{U\cdot J\cdot\cos\varphi}_{\text{zeitlich konstant!}} - \underbrace{U\cdot J\cdot\cos(2\omega t + \varphi_u + \varphi_i)}_{\text{mit doppelter Frequenz } \omega \text{ schwankend}}$$

Momentanwert der Leistung

Betrachtung für verschiedene Phasenwinkel φ:

$\varphi = 0$:

rein reell!

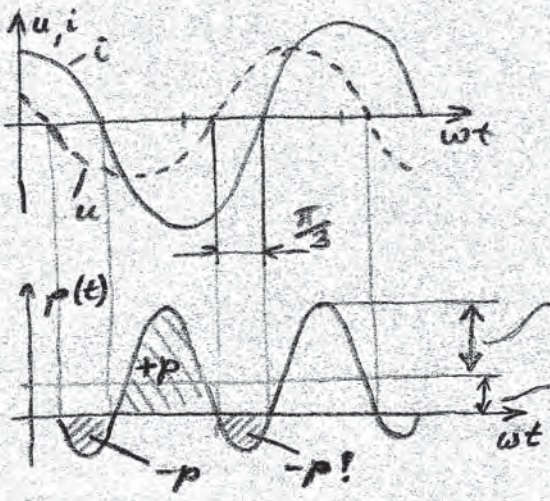


Arithmet. Mittelwert von $p(t)$ ist $\overline{p(t)} = \frac{\hat{U}\hat{J}}{2} = U\cdot J$ = Wirkleistung P

≙ Amplitude des Wechselanteils von $p(t)$ ist die Scheinlstng S (hier ist $P = S$)

⇒ Zweipol enthält hier nur Wirkwiderstand.
nur positive Leistg ↷ ZP nimmt immer Energie auf! (nur reine Wirkleistung)

$\varphi = \frac{\pi}{3}$:



Scheinleistung S aus Ampl. des Wechselanteils $= U\cdot J$

Arithm. Mittelw. hier $= \frac{U\cdot J}{2}\Big|_{\varphi=\frac{\pi}{3}}$

hier Wirk- und Blindleistung!

⇒ ZP enthält Wirk- und Blindwiderstände!
ex. Zeitintervalle mit negativer Leistung, in denen der ZP Energie an die Quelle zurückliefert! ↷Q

(!) Für $\varphi = \frac{\pi}{2}$: liegt $p(t)$ symmetrisch zur ωt-Achse.
↷ Arithm. Mittelwert $= 0$ (keine Wirkleistung mehr!)

! Ampl. des Wechselanteils ist immer $= U\cdot J$ (für alle φ)

Die Amplitude des Wechselanteils $U \cdot I$ ist die <u>Scheinleistung S</u>
Der Mittelwert von $p(t)$ ist die <u>Wirkleistung P</u>

Wirkleistung P

$\hat{=}$ zeitlichem Mittelwert der Leistung $p(t)$:

$$P = \overline{p(t)} = \frac{1}{T}\int_T p \cdot dt = \frac{1}{T}\int_T u \cdot i \cdot dt$$

$$P = U \cdot I \cdot \cos\varphi \qquad [P] = 1W$$

Effektivwerte!

es entsteht: max. Wert für $\varphi = 0$ (reiner Wirkwiderstand)
$P = 0$ für $\varphi = \pm\frac{\pi}{2}$ (reiner Blindwiderstand)

P ist die in Wärme, mech. Energie, el.-magnet. Abstrahlung ... umgewandelte Leistung.

Wirkanteil zu berücksichtigen

$$\boxed{P = U \cdot I \cos\varphi = I^2 \cdot R = \frac{U^2}{R}}$$

$\cos\varphi$ = Leistungsfaktor (Wirkfaktor)

<u>Beispiel:</u> ein elektro-magnet. Lautsprecher
- wirkt induktiv bei mechanisch fest geklemmter Membran: $\varphi \approx \frac{\pi}{2}$
- wirkt mit $\varphi < \frac{\pi}{2}$ bei schwingender Membran (Wirkleistungsabgabe)

Blindleistung Q

$\hat{=}$ hin- und herpendelnder Leistung, deren zeitlicher Mittelwert Null ist (aus deren Amplitudenwert)

$$Q = U \cdot I \cdot \sin\varphi \qquad [Q] = 1\,var \text{ (volt-ampere reaktiv)}$$

es entsteht: max. Wert für $\varphi = \pm\frac{\pi}{2}$ (reiner Blindwiderstand)
$Q = 0$ für $\varphi = 0$ (reiner Wirkwiderstand)

$\sin\varphi$ = Blindfaktor

$$\boxed{Q = U \cdot I \cdot \sin\varphi = I^2 \cdot X_r = -U^2 \cdot B_p}$$

z.B. jeweils aus <u>Reihenschaltung</u>, <u>Parallelschaltung</u> die entspr. Blindwiderstände einsetzen. (allg. beachten, daß $X_r \neq -\frac{1}{B_p}$, s. Ersatzschaltbild Seite 15)

Scheinleistung S

Def. als Produkt der Eff.werte U und J, ohne Berücksichtigung der Phasenlage!

$$S = U \cdot J \qquad [S] = 1\,VA \text{ (Volt Ampere)}$$

≙ Amplitudenwert der um den Mittelwert schwankenden Leistung

auszudrücken durch Wirk- und Blindleistung:

mit $J = \sqrt{J_W^2 + J_B^2}$ Wirk- u. Blindanteil des Stromes in Parallelschaltung

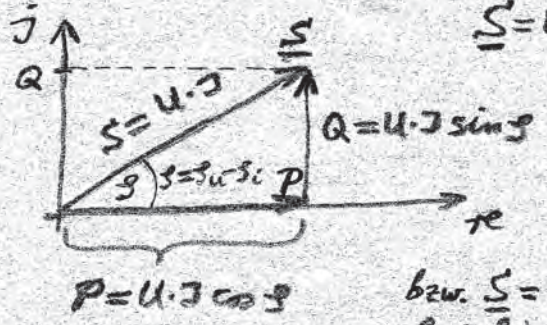
$$\curvearrowright S = \sqrt{(U \cdot J_W)^2 + (U \cdot J_B)^2} = \sqrt{(U^2 \cdot G_p)^2 + (U^2 \cdot B_p)^2}$$

$$\boxed{\begin{aligned} S &= \sqrt{P^2 + Q^2} = U \cdot J \\ &= J^2 \cdot |\underline{Z}| = U^2 |\underline{Y}| = J^2 \cdot Z = U^2 \cdot Y \end{aligned}}$$

Reihensch. Paralleled.

(analog mit U_W, U_B auszuf. in der Reihenschaltung)

Leistungsdarstellung in der komplexen Ebene (kompl. Scheinleistg)



$$\underline{S} = U \cdot J \cdot e^{j\varphi} = U \cdot J \cos\varphi + jU J \sin\varphi = P + j \cdot Q$$

$$\curvearrowright S = \sqrt{P^2 + Q^2} = |\underline{S}|$$

$$P = Re\{\underline{S}\}$$

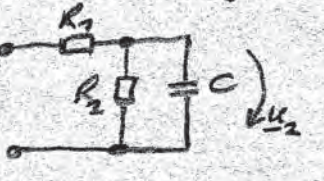
$$Q = Im\{\underline{S}\}$$

bzw. $\underline{S} = \underline{U} \cdot \underline{J}^*$ (komplexe Effektivwerte)

Aus der komplexen Scheinleistung $\underline{S}$ sind alle Leistungsanteile in einem Rechengang ermittelbar, wenn $\underline{u}$ und $\underline{i}$ bekannt sind!

ZB: Leistungs-Berechnung in Zweipolen (Verschiedene Rechenwege)

geg: $\underline{i}$, $\underline{u}$ (oder i)



ges.: P, Q, S der Schaltung

a.) Berechnung der Teilspannungen über allen Bauelementen

$$\curvearrowright P = J_1^2 \cdot R_1 + J_2^2 \cdot R_2 \quad \text{bzw. } P = \frac{U_1^2}{R_1} + \frac{U_2^2}{R_2} \quad \text{und } Q = U_2^2 \cdot (-\omega C)$$

mit Spannungsteilerregel wird U_1 u. U_2 berechnet:

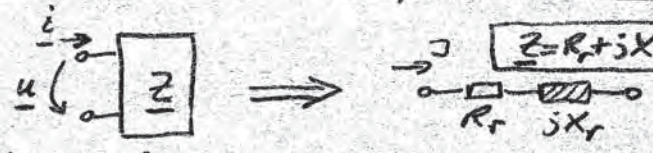
$$\underline{u}_2 = \underline{u}\,\frac{R_2 \| \frac{1}{j\omega C}}{R_1 + R_2 \| \frac{1}{j\omega C}} = \underline{u}\,\frac{R_2}{R_1 + R_2 + j\omega C R_1 R_2} \quad \curvearrowright \underline{|\underline{u}_2| = \hat{U}_2} = \hat{U}_1 \sqrt{\frac{R_2^2}{(R_1+R_2)^2 + (\omega C R_1 R_2)^2}}$$

$\underline{u}_1 = \ldots$ entsprechend $\quad \curvearrowright \underline{|\underline{u}_1| = \hat{U}_1} = \ldots$

jetzt Amplituden- in Effektivwerte umrechnen und P und Q berechnen...
(auch mgl. Gesamtstrom und Teilströme (StromTeiler) berechnen...)

b.) Umrechnung $R_2 \| \frac{1}{j\omega C}$ in eine Reihenschaltung, Add. von R_1, mit der gemeinsamen Größe $\underline{J}$ die Leistungsbestandteile ber. oder Umrechnung in eine Parallelersatzschaltung, mit der gemeinsamen Größe $\underline{U}$ die Leistungsbestandteile berechnen.

c.) Bestimmung des äquivalenten Reihen- bzw. Parallel-ESB

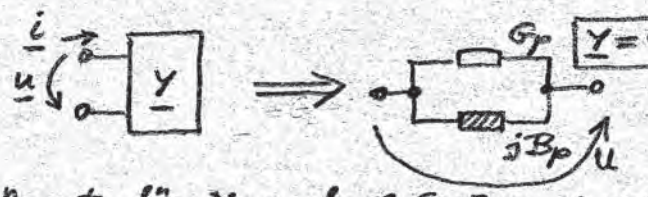


in Reihen-ESB gemeinsame Größe $\underline{J}$

Ansatz für $\underline{Z}$ nach $Re\{\underline{Z}\}$ und $Im\{\underline{Z}\}$ trennen (Arithmetische Form)

hieraus $\Longrightarrow$ $\underline{P = J^2 \cdot R_r}$ und $\underline{Q = J^2 \cdot X_r}$, $\underline{S = J^2 \cdot Z} = \sqrt{P^2 + Q^2}$

bzw:



im Parallel-ESB gemeinsame Größe $\underline{U}$

Ansatz für $\underline{Y}$ nach $Re\{\underline{Y}\}$ und $Im\{\underline{Y}\}$ trennen (Arithmet. Form)

hieraus $\Longrightarrow$ $\underline{P = U^2 \cdot G_p} = U^2/R_p$ $\quad \underline{Q = U^2 \cdot (-B_p)} = U^2/X_p$ $\quad \underline{S = U^2 \cdot Y} = U^2/Z$

Die Leistungsberechnung aus kompl. Widerstand $\underline{Z}$ (Reihenschaltung) oder aus komplex. Leitwert $\underline{Y}$ (Parallelschaltung) für die gesamte Schaltung ist ia. einfacher auszuführen als die umständliche (mehrfache) Strom- u. Spannungsteiler-Rechnung!

d.) Rechnen mit der komplexen Scheinleistung $\underline{S}$

Hierbei entstehen in einem Ausdruck S, P und Q ($\underline{U}, \underline{J}$ Effektivwerte komplex)

$$\underline{S} = \underline{U} \cdot \underline{J}^* = U \cdot J \cdot e^{j\varphi} = \underbrace{U \cdot J \cdot \cos\varphi}_{P} + j \cdot \underbrace{U \cdot J \cdot \sin\varphi}_{Q}$$

$$\underline{S} = P + j \cdot Q$$

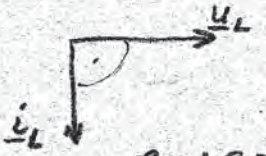
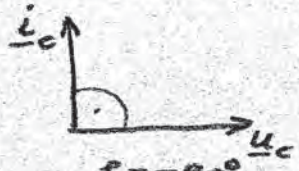
konjugiert komplexer Ausdruck von $\underline{J}$

wobei $\underline{S = |\underline{S}|}$ als Scheinleistung

Zeigerbilder – Darstellung der U-I-Beziehungen

liefern eine anschauliche Darst. der Amplituden- und Phasenbeziehungen in Schaltungen.
Ausgegangen wird vom ruhenden Zeiger (keine Zeitabhängigkeit) in der Exp.-Form: $A \cdot e^{j\varphi}$

Konstruktionsregeln: elementar gilt für ideale Bauelemente:

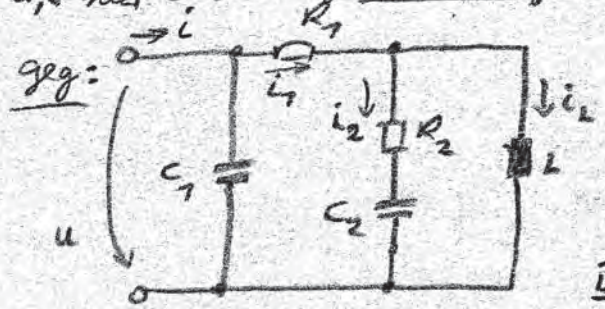
R	L	C
		
Parallel $\varphi = 0$ $U = R \cdot I$ keine Phasenverschiebung	$\varphi_z = +90°$ $U_L = I_L \cdot \omega L$ u_L eilt i_L um 90° voraus	$\varphi_z = -90°$ $U_C = I_C \cdot \frac{1}{\omega C}$ u_C eilt i_C um 90° nach

Die Addition / Subtraktion von harmonischen Fktnen (dh. $\underline{u}$, $\underline{i}$) wird nach dem Prinzip der vektoriellen Überlagerung der Zeiger ausgeführt!

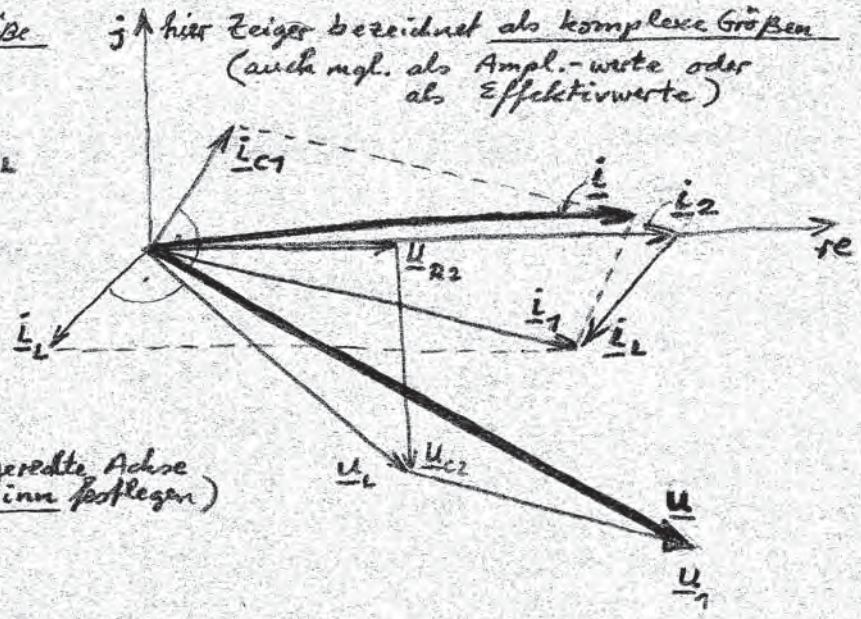
Entwicklung von Zeigerbildern (U, I) am Beispiel

u, i hier Bezeichnung als Wechselgröße

gg:



hier Zeiger bezeichnet als komplexe Größen (auch mgl. als Ampl.-werte oder als Effektivwerte)



Konstruktionsschritte:

1. $\underline{i}_2$ (zunächst in waagerechte Achse als Beginn festlegen)
2. $\underline{u}_{R2} \parallel \underline{i}_2$
3. $\underline{u}_{C2} \perp \underline{i}_2$
4. $\underline{u}_L = \underline{u}_{R2} + \underline{u}_{C2}$ (vektor. Add.)
5. $\underline{i}_L \perp \underline{u}_L$
6. $\underline{i}_1 = \underline{i}_2 + \underline{i}_L$ (vektor. Add.)
7. $\underline{u}_1 \parallel \underline{i}_1$ ($\underline{u}_1$ an $\underline{u}_L$ ansetzen)
8. $\underline{u} = \underline{u}_1 + \underline{u}_L$ (vektor. Add.)
9. $\underline{i}_{C1} \perp \underline{u}$
10. $\underline{i} = \underline{i}_1 + \underline{i}_{C1}$ (vektor. Add.)

Was ist wichtig: hier nur Amplituden- u. Phasenverhältnisse interessant,

Phasenbezugsachse: Zeigerbild kann so gedreht werden, daß zB. $\underline{u}$ in der reellen Achse liegt!

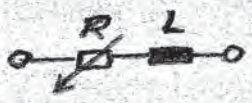
Allg. Vorgehensweise bei:

- Reihenschaltungen: vektorielle Addition der Spannungen bzw. der komplexen Widerstände (Add. der Komponenten der komplexen Größe)
- Parallelschaltungen: Ausgehen vom gemeinsamen Stromzeiger! vekt. Add. der Ströme, bzw. der komplexen Leitwerte
  Ausgehen vom gemeinsamen Spannungszeiger!

Ortskurvendarstellung

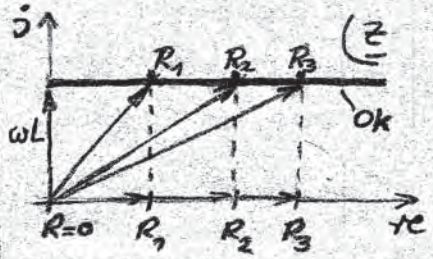
Wie verändert sich das Zeigerbild bei Parameteränderung von f, C, L, R ?

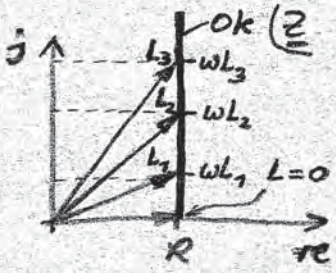
Beispiel R-L-Schaltung mit veränderlichem R bzw L:
Die Lage der Zeiger(spitze) ist abhängig von den sich ändernden Komponenten, dh. von Re- u. Im-Anteil



$\underline{Z} = R + j\omega L$

$\underline{Z} = R + j\omega L$

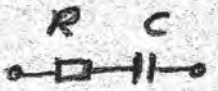




Ortskurve (Ok):
Verbindungslinie aller Zeigerspitzen bei Änderung eines Parameters.
(!) Skalierung der variablen Größe auf der Ortskurve!

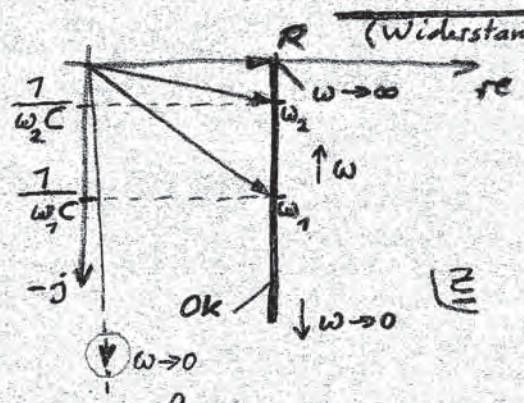
Beispiel: Reihenschaltung bei Frequenzänderung ↳ $\underline{Z}(\omega)$ - Ortskurve (Widerstands-Ok)

für Schaltung bei ω ↗



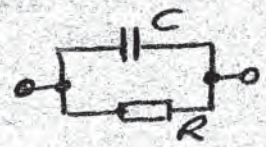
kompl. Wid. $\underline{Z} = R + \frac{1}{j\omega C}$

$= R - j\frac{1}{\omega C}$

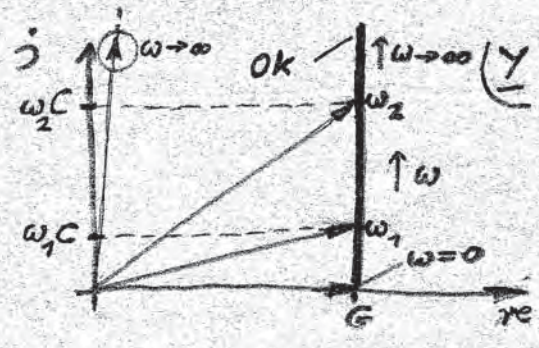


Analog: Parallelschaltung ↳ $\underline{Y}(\omega)$-Ortskurve (Leitwert-Ok)

für Schaltung bei ω ↗



kompl. Leitwert $\underline{Y} = G + j\omega C$

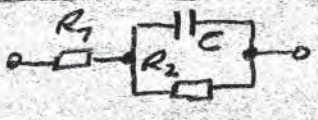


In der komplexen Zahlenebene können in der
- $\underline{Z}$ - Darstellung <u>nur</u> die Re- oder Im-Komponente einer <u>Reihenschaltg.</u>
- $\underline{Y}$ - Darstellung <u>nur</u> — " — einer <u>Parallelschaltg.</u>

hinzugefügt (addiert) werden! Um zB. eine gegebene Schaltung zu erweitern oder die Ortskurve für eine Schaltung darzustellen, die aus Reihen <u>und</u> Parallelschaltungen von R, L, C besteht, muß ggf. die Ortskurve jeweils in die inverse Form gebracht werden:

Inversion von Ortskurven (Ok)

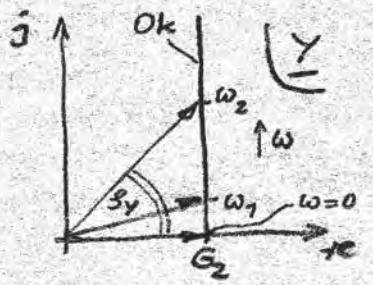
am Beispiel:



$$\underline{Z} = R_1 + \left(R_2 \| \frac{1}{j\omega C}\right) = R_1 + \frac{1}{G_2 + j\omega C}$$

hierzu zuerst Darstellung der R_2-C-Parallelschaltung <u>in Leitwertdarstellung</u>

$\underline{Y} = G_2 + j\omega C$



aus einer <u>Gerade</u>, die nicht durch d. Koordinatenursprung verläuft ... (im 1. Quadranten)

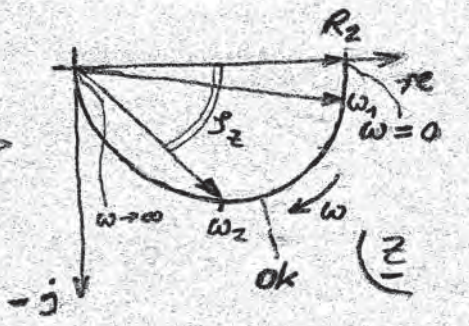
Inversion

$$\underline{Z} = \frac{1}{\underline{Y}} = \frac{1}{|\underline{Y}| \cdot e^{j\vartheta_Y}}$$

$$\underline{Z} = \frac{1}{|\underline{Y}|} \cdot e^{j(-\vartheta_Y)}$$

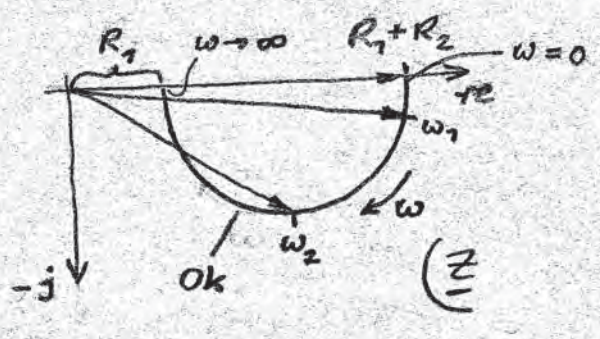
$$\Downarrow$$

$$|\underline{Z}| = \frac{1}{|\underline{Y}|} \; ; \; \vartheta_Z = -\vartheta_Y$$



... entsteht ein <u>Halbkreis</u> (im 4. Quadranten)

In der $\underline{Z}$-Darstellung kann nun R_1 als Re-Anteil addiert werden, da R_1 in Reihe zur invertierten Parallelschaltung liegt.
(In der Y-Darstellung ist das Hinzufügen von R_1 <u>nicht</u> mgl. – wegen der Leitwertdarstellung – hier wäre <u>nur</u> eine Parallelschaltung zu berücksichtigen)



Die Addition des Re-Anteils R_1 verschiebt die gesamte Kurve um R_1 in Re-Achsenrichtung

Bei nur einem Speicherelement (L, C) entstehen als Ok Geraden und Halbkreise,
bei mehreren Speicherelementen infolge frequenzabhängiger Überlagerung der Im-Anteile auch andere Formen!
(s. hierzu Lunze: Theorie der Wechselstromschaltungen)

Beispiel zum Reihen- / Parallel-Ersatzschaltbild (ESB)

Umfangreiche komplexe Widerstände (R, L, C) können nach der Bildung von Re-Anteil und Im-Anteil als eine Reihen-Ersatzschaltung dargestellt werden (nach Rechnung mit Leitwerten als Parallel-Ersatzschaltung)

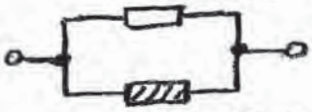
Reihen-ESB

$R = Re\{\underline{Z}\}$ $X = Im\{\underline{Z}\}$

$$\boxed{\underline{Z} = R + j \cdot X}$$

Parallel-ESB

$G = Re\{\underline{Y}\}$



$B = Im\{\underline{Y}\}$

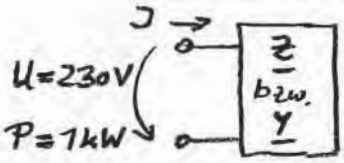
$$\boxed{\underline{Y} = G + j \cdot B}$$

allg. gilt für —▨— ≙ C oder L

Hiermit ist das u - i - Verhalten an den Klemmen beschreibbar. Umgekehrt kann ein ESB auch aus $\underline{u}$ und $\underline{i}$ (bzw. der Leistung) an den Klemmen (elektr. gemessene Größen) bestimmt werden:

geg: Komplexer Widerstand bzw. Leitwert → Bestimmung der ESB

a.)



u eilt i um 30° voraus ↷ damit induktiver Blindanteil

$f = 50\,Hz$ $\varphi = 30°$

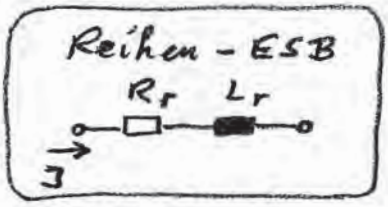
aus $P = U \cdot J \cdot \cos\varphi$ (Wirkleistung P) folgt $J = \dfrac{P}{U \cdot \cos\varphi} = 5{,}02\,A$

mit $\underline{Z} = \dfrac{\underline{u}}{\underline{i}} = \dfrac{U}{J} \cdot e^{j\varphi} = \dfrac{U}{J}\left(\cos\varphi + j \cdot \sin\varphi\right)$

$$= \frac{230\,V}{5{,}02\,A}\left(\cos 30° + j \cdot \sin 30°\right)$$

$$\underline{Z} = 39\,\Omega + j \cdot 22{,}9\,\Omega = R + j \cdot X_L$$

↓



$R_r = 39\,\Omega$

$X_L = \omega L_r = 22{,}9\,\Omega$

↷ $L_r = \dfrac{X_L}{\omega} = 0{,}073\,H$

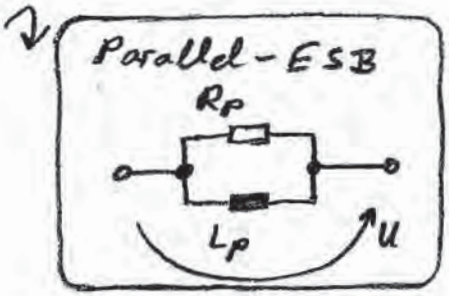
b.) Für die Berechung des Parallel-ESB wird die Leitwertdarstellung genutzt (! Phasen ∡ hier mit umgekehrtem Vorzeichen)

mit $\underline{Y} = \dfrac{\underline{i}}{\underline{u}} = \dfrac{J}{U} \cdot e^{j(-\varphi)} = \dfrac{J}{U}\left(\cos(-\varphi) + j \cdot \sin(-\varphi)\right)$

$$= \frac{5{,}02\,A}{230\,V}\left(\cos(-30°) + j \cdot \sin(-30°)\right)$$

$\left(\underline{Y} = \dfrac{1}{\underline{Z}}, \quad \varphi_Y = -\varphi_Z, \quad \varphi_Y = -30°\right)$

$$\underline{Y} = 0{,}013\,S - j\cdot 0{,}011\,S = G + j\cdot B$$



$G_p = 0{,}013\,S$ $\qquad$ $B = -\frac{1}{\omega L_p} = -0{,}011\,S$

$R_p = \frac{1}{G_p} = 52{,}6\,\Omega$ $\qquad$ $L_p = -\frac{1}{\omega B} = 0{,}29\,H$

Die Leistungsberechnung hierzu

ist anhand der ESB einfach ausführbar:

Wirkleistung P am Wirkwiderstand / -leitwert
Blindleistung Q am Blindwiderstand / -leitwert

unter Nutzung der gemeinsamen el. Größe • Strom J im Reihen-ESB
• Spannung U im Parallel-ESB

$$P = J^2\cdot R_r = (5{,}02\,A)^2\cdot 39\,\Omega = 1\,kW$$
$$P = U^2\cdot G_p = \frac{U^2}{R_p} = \frac{(230\,V)^2}{52{,}6\,\Omega} = 1\,kW$$

$$Q = J^2\cdot \omega L_r = (5{,}02\,A)^2\cdot 2\pi\cdot 50\,s^{-1}\cdot 0{,}073\,\frac{Vs}{A} = 580\,var$$
$$Q = U^2\cdot(-B_p) = \frac{U^2}{\omega L_p} = \frac{(230\,V)^2}{2\pi\cdot 50\,s^{-1}\cdot 0{,}29\,Vs}\,A = 580\,var$$

jeweils zum Vergleich aus Reihen-ESB u. Parallel-ESB berechnet

gleiches Ergebnis aus $P = U\cdot J\cdot\cos\varphi$ und $Q = U\cdot J\cdot\sin\varphi$!

Blindleistungskompensation

In Energieversorgungsnetzen pendelt die Blindleistung Q zwischen Erzeuger und Verbraucher ohne daß Wirkleistung übertragen wird.
Der Blindstrom verursacht aber Wirkverluste über den ohmschen Zuleitungswiderständen, bzw. belastet die Erzeugeranlagen!

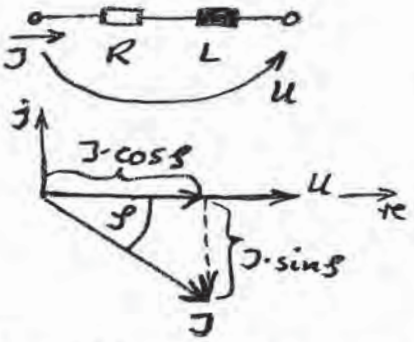
In Industrieanlagen ist die Blindleistungkompensation gesetzlich vorgeschrieben!

Ziel ist die Kompensation des Blindstromanteils, dh. es soll der

$\boxed{\text{Leistungsfaktor } \cos\varphi \to 1}$ gehen!

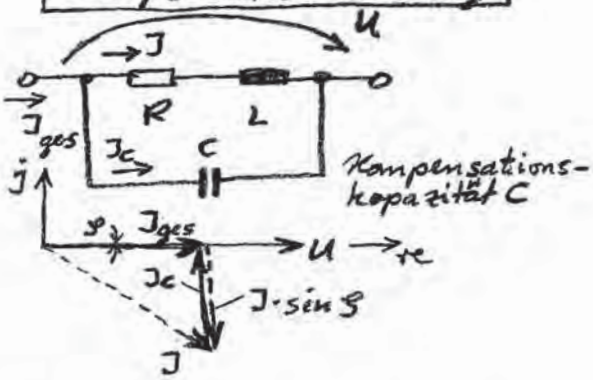
Um die Spannung am komplexen Verbraucher als festen Wert zu belassen, ist technisch nur die Parallelschaltung des kompensierenden Bauelements sinnvoll:

zu kompensierende Schaltung



durch Parallelschaltung C erfolgt die Komp. des Blindstroms

Kompensierte Schaltung



J enthält Wirkstrom $J \cdot \cos\varphi$ und Blindstrom $J \cdot \sin\varphi$

$\Rightarrow$ $J \cdot \sin\varphi$ ist der zu kompensierende Blindstrom der R-L-Schaltung. Dieser wird genau durch J_C kompensiert!

Nach der Kompensation ist der

- Zuleitungsstrom J_{ges} deutl. vermindert (nur noch Wirkstrom)
- Phasen∡ φ zwischen U und J : $\underline{\underline{\varphi = 0°, \text{ dh. } \cos\varphi = 1}}$

Für diese vollständige Blindstromkompensation muß gelten

$$J_C = \frac{U}{\frac{1}{\omega C}} = J \cdot \sin\varphi \quad \curvearrowright \quad \underline{\underline{C = \frac{J \cdot \sin\varphi}{\omega \cdot U}}}$$

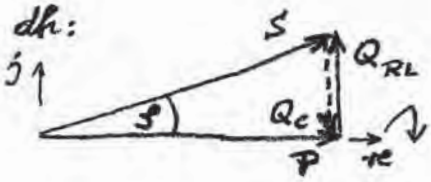
Die Betrachtung als Blind<u>leistungs</u>kompensation geht von der vollst. Kompensation der Blindleistung Q_{RL} der R-L-Schaltung durch die Blindleistung Q_C des parallelgeschalteten C aus:

$$Q_{RL} \overset{!}{=} Q_C$$

$$U \cdot J \cdot \sin\varphi = \frac{U^2}{\frac{1}{\omega C}} \quad \curvearrowright \quad \underline{\underline{C = \frac{J \cdot \sin\varphi}{\omega U}}}$$

(gleiches Ergebnis)

dh:

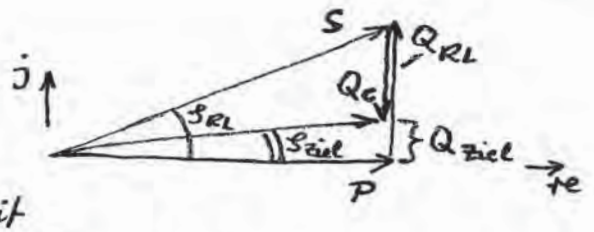


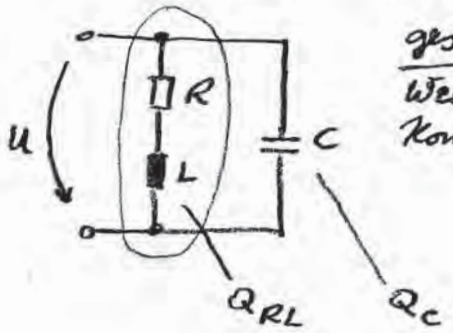
$\curvearrowright$ mit $Q_{RL} = P \cdot \tan\varphi$ auch $\underline{\underline{C = \frac{P \cdot \tan\varphi}{\omega U^2}}}$

<u>Im praktischen Fall</u> lohnt sich diese vollst. Kompensation nicht. Für kleine φ unterscheiden sich der kompensierte Strom J_{ges} und der nichtkompensierte Strom J nur wenig, dh. $J_{ges} \approx J \cdot \cos\varphi$

zB: praktisch $\cos\varphi = 0{,}9$ ($\varphi \approx 26°$) erfordert <u>deutlich weniger Komp.-Kapazität!</u> (Kostenfrage)

Soll die Blindleistungskompensation nur auf einen Leistungsfaktor $\cos\varphi_{ziel}$ verringert werden: (meist auf $\cos\varphi_{ziel} = 0{,}95 \ldots 0{,}98$)





ges:
Wert der Komp.-kapazität C

mit

$$Q_{RL} = P \cdot \tan\varphi_{RL}$$

$$Q_{ziel} = P \cdot \tan\varphi_{ziel}$$

$$Q_C = \frac{U^2}{X_C} = U^2 \cdot \omega C$$

(richtig wäre negatives Q_C dies wird hier durch die Zählpfeilrichtung berücksichtigt)

wird

$$Q_{ziel} = P \cdot \tan\varphi_{ziel} = Q_{RL} - Q_C$$

$$P \cdot \tan\varphi_{ziel} = P \cdot \tan\varphi_{RL} - U^2 \cdot \omega C$$

$$P\left(\tan\varphi_{ziel} - \tan\varphi_{RL}\right) = -U^2 \cdot \omega C$$

$$\curvearrowright \quad C = -\frac{P}{\omega U^2}\underbrace{\left(\tan\varphi_{ziel} - \tan\varphi_{RL}\right)}_{\text{neg. Wert}}$$

Kompensations-kapazität

$$\boxed{C = \frac{P}{\omega U^2}\left(\tan\varphi_{RL} - \tan\varphi_{ziel}\right)}$$

Zahlenrechnung für voriges Beispiel RL-Schaltung:

$P = 1\,kW$

$U = 230\,V \qquad f = 50\,Hz$

$\varphi = 30° \quad (\cos\varphi = 0{,}866)$ ist zu kompensieren auf $\cos\varphi_{ziel} = 0{,}95$

$$\varphi_{ziel} = \arccos 0{,}95 = 18{,}19° \quad (\text{induktiv})$$

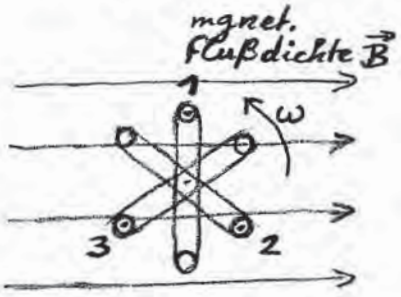
$$C = \frac{1000\,W}{2\pi \cdot 50\,s^{-1} \cdot (230\,V)^2} \cdot \left(\tan 30° - \tan 18{,}19°\right)$$

$$\underline{\underline{C}} = 1{,}5 \cdot 10^{-5}\,\frac{As}{V} = \underline{\underline{15\,\mu F}}$$

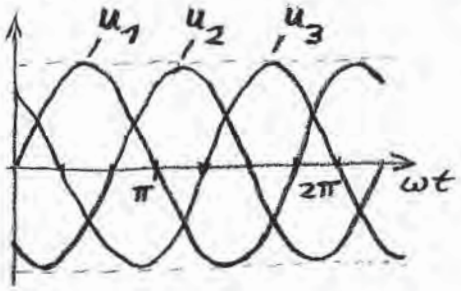
Das symmetrische Dreiphasensystem (Drehstromsystem)

angewandt in Energieversorgungsnetzen:
3 Spannungen mit gleicher Amplitude und gleicher gegenseitiger Phasenverschiebung erzeugen ein "symmetrisches Netz"

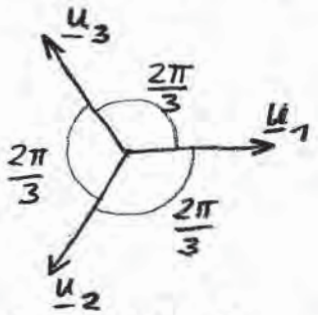
Erzeugung von 3 um jeweils 120° phasenverschobenen Spannungen:



3 um 120° versetzte Spulen werden mit Winkelgeschw. ω gedreht



Verlauf der erzeugten Strangspannungen in den Spulen



Zeigerbild der Strangspannungen

Nun kann mit der Speisung von 3 räumlich um 120° versetzten Spulen hiermit ein drehendes Magnetfeld (Drehfeld aus der Überlagerung der 3 Einzelmagnetfelder) erzeugt werden, das mit gleicher Winkelgeschwindigkeit ω räumlich umläuft!

↓ einfache Realisierung von Antrieben mit zeitlich konstanter Leistungsabgabe

Dies ≙ Funktionsgrundlage aller Drehfeldmaschinen! (Motoren, Generatoren)

Es gilt
$$u_1 = \hat{U} \cdot \sin \omega t$$
$$u_2 = \hat{U} \cdot \sin\left(\omega t - \frac{2\pi}{3}\right)$$
$$u_3 = \hat{U} \cdot \sin\left(\omega t - \frac{4\pi}{3}\right)$$
vgl. Zeigerbild

Wenn eine Drehfeldmaschine p dreiphasige Spulensysteme enthält folgt mit der Frequenz f des speisenden Drehstromsystems die

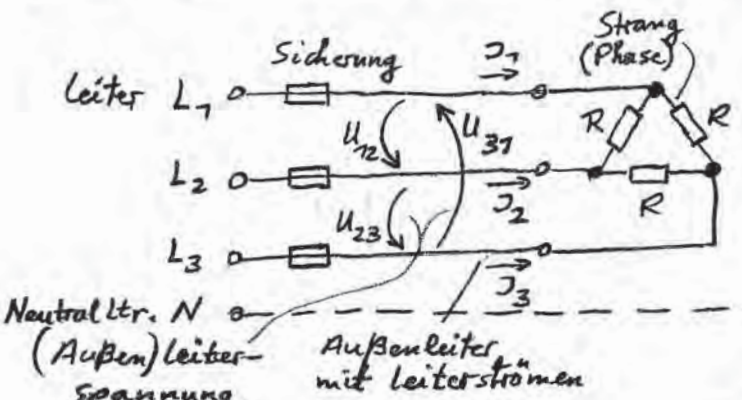
Winkelgeschwindigkeit $\Omega = \frac{2\pi f}{p}$ und $\boxed{\text{(synchrone) Drehzahl } n = \frac{60 \cdot f}{p} \text{ in } U/\text{min}}$

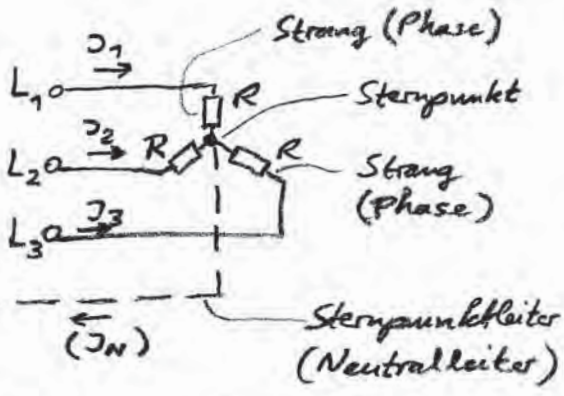
"Polpaarzahl"

Bezeichnungen:

- Strang : Spannungs- / Felderzeugende Spulen (auch "Phase")
- (Außen)leiterspannung: Differenz zweier um 120° verschob. Strangspannungen (auch "Verkettete Spannung")

Verkettetes Dreiphasensystem





Dreieckschaltung Δ

Es gilt:

$$U_{Strang} = U_{Leiter} \; (=400V)$$

$$\sqrt{3} \cdot J_{Strang} = J_{Leiter}$$

Leistung bei symmetrischer Belastung (gleiche R bzw. gleiche Impedanz)

$$P_\Delta = 3\, U_{Strang} \cdot J_{Strang} \cdot \cos\varphi$$

Spez. Fall Ohmsche Last R

$$P_\Delta = 3 \frac{U_{Leiter}^2}{R} = 3 P_\lambda$$

wobei $J_{Leiter_\Delta} = \frac{U_{Leiter}}{R} \sqrt{3}$

weil Leiterstrom hier um $\sqrt{3}$ größer als J_{Strang} ist

Sternschaltung λ

$$\sqrt{3}\, U_{Strang} = U_{Leiter}$$

$$J_{Strang} = J_{Leiter}$$

($U_{Strang} = 230V$) zu Faktor $\sqrt{3}$ siehe S. 33 unten!

$$P_\lambda = 3\, U_{Strang} \cdot J_{Strang} \cdot \cos\varphi$$

$$P_\lambda = 3 \frac{\left(\frac{U_{Leiter}}{\sqrt{3}}\right)^2}{R} = \frac{U_{Leiter}^2}{R} = \frac{P_\Delta}{3}$$

wobei $J_{Leiter_\lambda} = \frac{U_{Leiter}}{\sqrt{3} \cdot R}$

weil Strangspanng hier um $1/\sqrt{3}$ gegenüber U_{Leiter} geringer ist

Leistungsbetrachtung zeigt, daß bei symm. Last (gleiche Wid. R bzw. Impedanzen in allen 3 Strängen) bei gleicher Leiterspannung gilt:

$$\boxed{P_\Delta = 3 \cdot P_\lambda}$$

Hieraus folgt die sogenannte "Stern-Dreieck-Umschaltung" bei elektr. Maschinen für den Übergang vom Betriebszustand Anlauf auf Vollast!

Da entweder Leiterstrom oder Leiterspannung um $\sqrt{3}$ größer ist, als die zugehörige Stranggröße

↓ Einheitliche Beziehung für P_Δ und P_λ:

dargest. durch die (Außen)leitergrößen, die leicht meßbar sind:

$$P = 3 \cdot U_{Strang} \cdot J_{Strang} \cdot \cos\varphi$$

$$\boxed{P = \sqrt{3}\, U_{Leiter} \cdot J_{Leiter} \cdot \cos\varphi}$$

Faktor: $\frac{3}{\sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{3}\sqrt{3}} = \sqrt{3}$

Leistungsfaktor $\cos\varphi = \frac{P}{S}$ $\qquad S = \sqrt{P^2 + Q^2}$

entspr. gilt: Blindlstg. $\boxed{Q = \sqrt{3}\, U_{Leiter} \cdot J_{Leiter} \sin\varphi}$, Scheinlstg. $\boxed{S = \sqrt{3} \cdot U_{Leiter} \cdot J_{Leiter}}$

Allg. Vorzüge des Drehstromsystems bei symm. Belastung:

- Leistung wird zeitlich konstant an den Verbraucher geleistet
- Der Strom im Sternpunktleiter ist $= 0$, Die Spannung im Sternpunkt ist $= 0$ (Neutral = Massepotenzial)

$$i_1 + i_2 + i_3 = \hat{J}\left[\sin\omega t + \sin\left(\omega t - \frac{2\pi}{3}\right) + \sin\left(\omega t - \frac{4\pi}{3}\right)\right] = 0 = i_N$$

(dh. Σ Leiterströme = Neutralleiterstrom i_N) vgl. Knotenpktsatz

- Durch Δ- bzw. λ-Schaltung der 3 jeweils um 120° gedrehten Phasen werden Leitungen gespart – gegenüber dem Fall, daß jede Phase mit 2 Leitungen angeschlossen würde.

Kombinationen von Δ- und λ-Schaltung (Generator-/Last-Seite) sind möglich u. gebräuchlich!

In der λ-Schaltung gilt zum Verhältnis von U_{Leiter} zu U_{Strang}:

Die (Außen)leiterspannungen ergeben sich aus der Differenz der um 120° verschobenen Strangspannungen

$$\underset{\text{Leiterspng.}}{u_{12}} = \underset{\text{jew. Strangsp. bezogen auf N-Leiter}}{u_{1N} - u_{2N}} = \hat{u}\left[\sin\omega t - \sin\left(\omega t - \frac{2\pi}{3}\right)\right]$$

Umformung

$$= \hat{u}\left[\sin\left(\omega t - \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{3}\right) - \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{3}\right)\right]$$

unter Nutzung des Additions-Theorems: $\sin(\alpha+\beta) - \sin(\alpha-\beta) = 2\cos\alpha \cdot \sin\beta$

wird $u_{12} = 2\hat{u} \cdot \sin\frac{\pi}{3} \cdot \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{3}\right)$ (λ-Schaltung)

$$\underbrace{u_{12}}_{\text{Leiterspannung}} = \sqrt{3}\,\hat{u} \cdot \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{3}\right) = \underbrace{\sqrt{3} \cdot \hat{u} \cdot \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{6}\right)}_{\text{Strangspannung}}$$

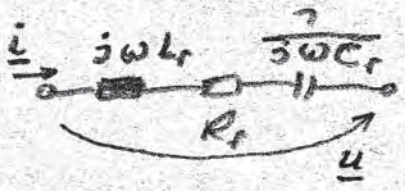
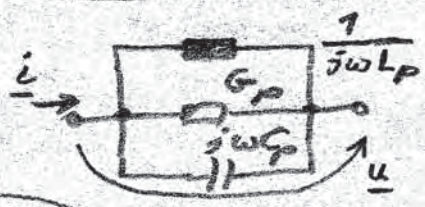
$\boxed{\text{Faktor } \sqrt{3}}$

In der Δ-Schaltung fließt kein Ringstrom, da die Σ der 3 phasenverschobenen Strangspannungen zu jedem Zeitpkt. verschwindet.

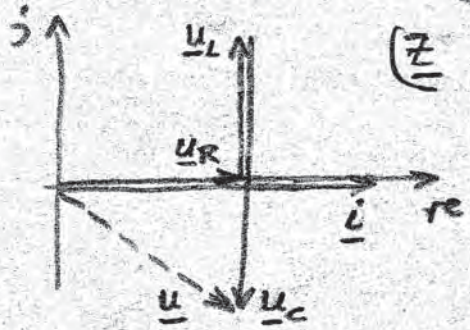
... analog nachweisbar, daß gilt: $J_{Leiter} = \sqrt{3}\, J_{Strang}$ (Δ-Schaltung)

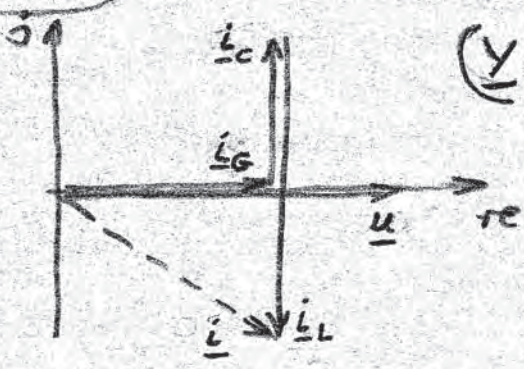
Resonanz / Schwingkreise

R, L, C – Schaltungen bei denen mit veränderl. Frequenz ein Extremwert von $|\underline{i}|$, $|\underline{u}|$ oder $|\underline{Z}|$ auftritt.

Reihenresonanzkreis	Parallelresonanzkreis
	
L + R + C	L ∥ R ∥ C

Zeigerdarstellg. $\underline{i}, \underline{u}$:





$$\underline{Z}_r = R_r + j\left(\omega L_r - \frac{1}{\omega C_r}\right)$$

$$|\underline{Z}_r| = \sqrt{R_r^2 + \left(\omega L_r - \frac{1}{\omega C_r}\right)^2}$$

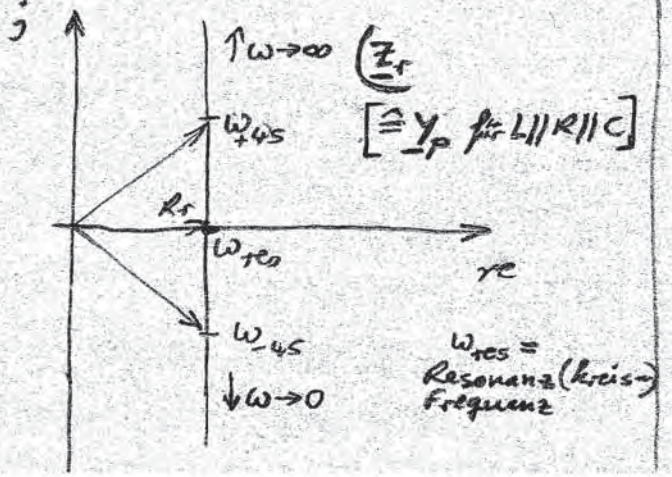
$$\varphi_r = \arctan \frac{\omega L_r - \frac{1}{\omega C_r}}{R_r}$$

$$\underline{Y}_p = G_p + j\left(\omega C_p - \frac{1}{\omega L_p}\right)$$

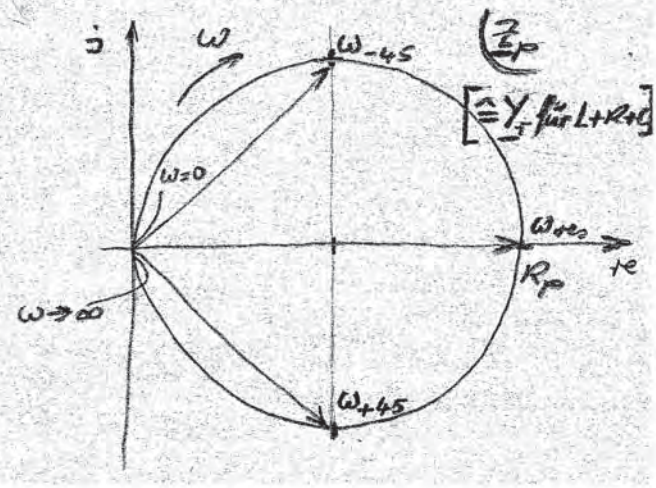
$$|\underline{Y}_p| = \sqrt{G_p^2 + \left(\omega C_p - \frac{1}{\omega L_p}\right)^2}$$

$$\varphi_p = \arctan \frac{\omega C_p - \frac{1}{\omega L_p}}{G_p}$$

Ortskurvendarst.

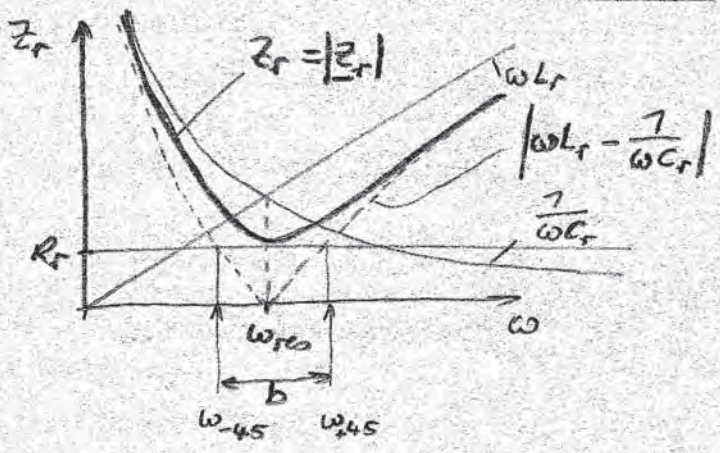


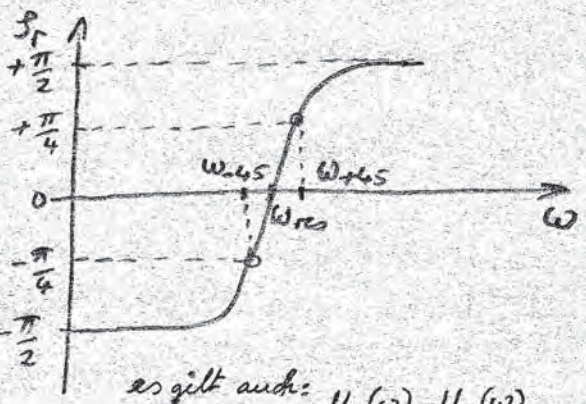
ω_{res} = Resonanz(kreis-) Frequenz



ω_{+45} und ω_{-45} sind die 45°-Frequenzen ($\varphi = \pm 45°$) $\hat{=}$ "Grenzfrequenzen"

Scheinwiderstand u. Phasenwinkel des Reihenresonanzkreises $= f(\omega)$





es gilt auch: $\varphi_r = \arctan \dfrac{U_L(\omega) - U_C(\omega)}{U_R(\omega)}$

da gleicher Strom $J(\omega)$ durch alle Bauelem. fließt

Zur Bestimmung der charakteristischen Größen:

a.) Resonanzfrequenz f_{res}

Def: gilt bei f, für die $\underline{Z}_r$ bzw. $\underline{Y}_p$ reell werden, dh.

$$\mathrm{Im}\{\underline{Z}\} \text{ bzw. } \mathrm{Im}\{\underline{Y}\} = 0$$

↳ für RSk: $\omega L_r - \dfrac{1}{\omega C_r} = 0$

$$\omega = \omega_{res} = \frac{1}{\sqrt{L_r C_r}}$$

für PSk: $\omega C_p - \dfrac{1}{\omega L_p} = 0$

$$\omega_{res} = \frac{1}{\sqrt{L_p C_p}}$$

- dh. kap. und indukt. Blindkomponente betragsmäßig gleich, aber u_L und u_C gegenphasig!
- max. Werte für gespeicherte Energie (max. u_C, max. i_L)

$$\left.\begin{aligned} \text{im } C: \quad W_{C\,res} &= \frac{C_r \cdot \hat{U}_C^2}{2} \\ \text{im } L: \quad W_{L\,res} &= \frac{L_r \cdot \hat{J}^2}{2} \end{aligned}\right\} \text{sind gleich groß}$$

- Generator liefert nur Wirkleistung $J^2 \cdot R_r = P$ bei f_{res}, elektr. u. magnetische Feldenergie pendelt innerhalb des Schwingkreises!

b.) Resonanzschärfe (Güte Q)

Def:

$$\boxed{Q = \frac{\text{Betrag einer imaginären Komponente}}{\text{Wirkkomponente}}\Bigg|_{\omega_{res}}}$$

↳ für Reihenres.kreis: $Q_r = \dfrac{\omega_{res} L_r}{R_r} = \dfrac{1}{\omega_{res} C_r R_r} = \dfrac{1}{R_r}\sqrt{\dfrac{L_r}{C_r}}$

für Parallelersatz: $Q_p = \frac{\omega_{res} C_p}{G_p} = \frac{1}{\omega_{res} L_p G_p} = \frac{1}{G_p}\sqrt{\frac{C_p}{L_p}}$

dh. $Q\uparrow$ mit $\downarrow$ Wirkkomponente

$\Downarrow$ ausgeprägtere Resonanzerscheinung ! (s. S.35)

c.) 45° - Frequenzen

Def: f, bei denen Blindkomponente = Wirkkomponente wird, dh. $\mathrm{Im}\{\} \overset{!}{=} \mathrm{Re}\{\}$ damit wird $\varphi = \pm 45°$

RSk:

$$\omega_{\pm 45} L_r - \frac{1}{\omega_{\pm 45} C_r} = \pm R_r$$

$$\omega_{\pm 45} = \sqrt{\frac{1}{L_r C_r} + \left(\frac{R_r}{2L_r}\right)^2} \pm \frac{R_r}{2L_r}$$

PSk:

$$\omega_{\pm 45} C_p - \frac{1}{\omega_{\pm 45} L_p} = \pm G_p$$

$$\omega_{\pm 45} = \sqrt{\frac{1}{L_p C_r} + \left(\frac{G_p}{2C_p}\right)^2} \pm \frac{G_p}{2C_p}$$

mit $\omega_{res} = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ und $Q = \ldots$ wird

$$\omega_{\pm 45} = \omega_{res}\left(\sqrt{1 + \left(\frac{1}{2Q}\right)^2} \pm \frac{1}{2Q}\right) \qquad (*)$$

je $Q\uparrow$, desto enger liegen die $\pm\omega_{45}$-Frequenzen zusammen

d.) Bandbreite b

Def: Frequenzdifferenz zwischen $f_{\pm 45}$ -Frequenzen:

$$b = f_{+45} - f_{-45} \qquad (\omega = 2\pi f)$$

mit Gleichg. (*) $\rightsquigarrow$ $\boxed{b = \frac{f_{res}}{Q}}$

damit relative Bandbreite $\frac{b}{f_{res}} = \frac{1}{Q}$

e.) Verstimmung v

Def: $$\boxed{v = \frac{\omega}{\omega_{res}} - \frac{\omega_{res}}{\omega}}$$ (sogenannte "Barkhausensche Doppelverstimmung")

dh. Angabe der relativen Frequenzabweichung von der f_{res} wird mit v dargestellt:

so wird für $\omega = \omega_{res}$ $\rightsquigarrow v = 0$

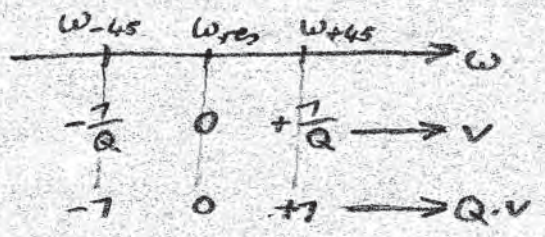
$\omega < \omega_{res}$ v negativ

$\omega > \omega_{res}$ v positiv

ZB.: Einsetzen von $\omega_{\pm 45}$ in Gl. (*)

so folgt $$v_{\pm 45} = \pm \frac{1}{Q}$$

verschiedene mgl. Darstellungen:



Zusammenhang:
- mit $Q\uparrow$ (dh. $R_r\downarrow$ bzw. $G_p\downarrow$), desto $\downarrow v$, um die 45°-Frequenzen zu erreichen!
  $\rightsquigarrow$ desto $\downarrow$ Bandbreite b
- 45°-Verstimmung $\overset{!}{=}$ relativer Bandbreite

↷ Normierte Darstellung für die Impedanz:

aus $$\boxed{\underline{Z}_r = R_r + j\left(\omega L_r - \frac{1}{\omega C_r}\right)}$$ wird nach Multiplikation der beiden Ausdrücke in der Klammer mit $\omega_{res} \cdot \sqrt{L_r C_r}$ ($=1$, da Resonanzfrequenz!) der Ausdruck:

$$\underline{Z}_r = R_r\left[1 + j \cdot \frac{1}{R_r}\sqrt{\frac{L}{C}}\left(\frac{\omega}{\omega_{res}} - \frac{\omega_{res}}{\omega}\right)\right] = R_r(1 + jQv)$$

Reihenres.kreis $$\boxed{\frac{Z_r}{R_r} = 1 + jQv = \frac{Y_p}{G_p}}$$ Parallelres.kreis

Betrag: $$\boxed{\frac{|\underline{Z}_r|}{R_r} = \sqrt{1+(Q\cdot v)^2} = \frac{|\underline{Y}_p|}{G_p}}$$

Reihenres.kreis Parallelres.kreis

Phasen $\measuredangle$: $\varphi_r = \varphi_p = \arctan Q\cdot v$

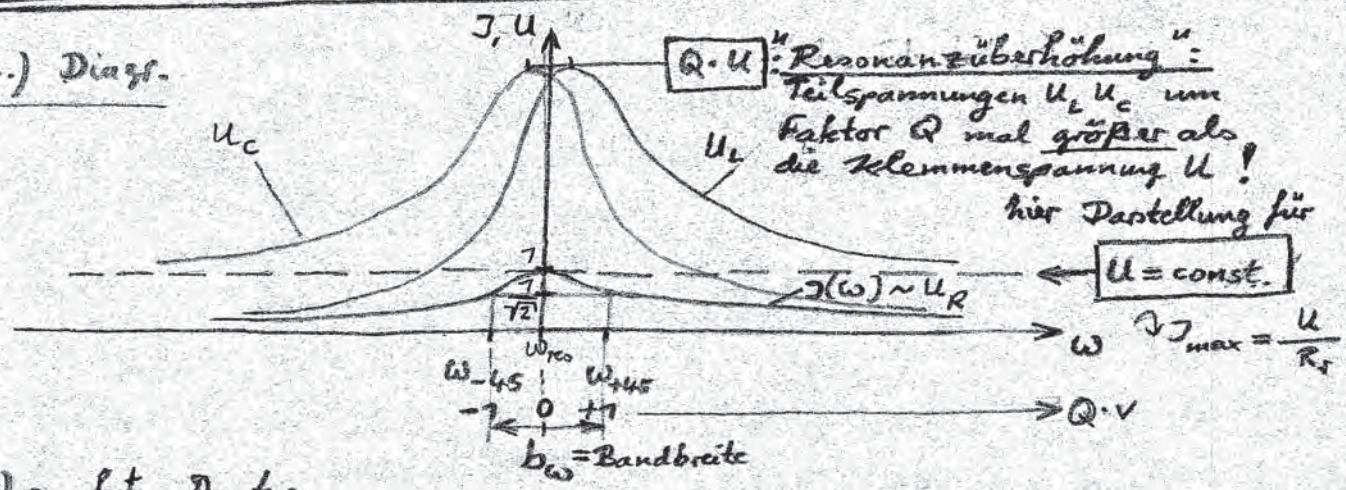
"Kontrolle": $\varphi = \pm 45°$ wenn $Re\{\} = Im\{\}$

dh. $Q\cdot v = \pm 1$, damit folgt wieder

$$v_{\pm 45} = \pm \frac{1}{Q}$$

Frequenzabhäng. der Teilspannungen für Reihenkreis:

a.) Diagr.



b.) analyt. Darst.:

mit $J(\omega) = \dfrac{U}{R_r\sqrt{1+(Qv)^2}}$, ist derselbe Strom durch R_r, L_r, C_r (Effektivwerte)

folgt: $$U_R(\omega) = R_r\cdot J(\omega) = \frac{U}{\sqrt{1+(Q\cdot v)^2}}$$

$$U_C(\omega) = \frac{1}{\omega C}\cdot J(\omega) = \frac{1}{\omega C R_r}\cdot\frac{U}{\sqrt{1+(Q\cdot v)^2}}$$

$$U_L(\omega) = \omega L\cdot J(\omega) = \frac{\omega L}{R_r}\cdot\frac{U}{\sqrt{1+(Q\cdot v)^2}}$$

für $\omega = \omega_{res}$, dh. $Q\cdot v = 0$ (Resonanzstelle) gilt:

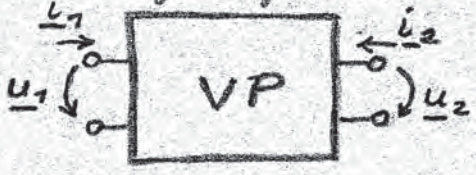
Spannungsüberhöhung $U_L(\omega_{res}) = U_C(\omega_{res}) = Q\cdot U$ Reihenkreis

[Stromüberhöhung $J_C(\omega_{res}) = J_L(\omega_{res}) = Q\cdot J$ Parallelkreis]

(!) Achtung: aus der Spannungsüberhöhung um den Gütefaktor Q ergibt sich zB. die erforderl. Spannungsfestigkeit der verwend. Bauelemente (typ. Wert $Q \approx 100$)

Frequenzverhalten von Schaltungen

allg. Vierpoldarst.



Eingang Ausgang

Ein Vierpol (VP) hat 2 Eingangs- und 2 Ausgangsklemmen (zB. ein Verstärker)

Allg. Fragestellung:

Wie reagiert die Schaltung bei Frequenzänderung bzgl. Spannungs-/Stromübersetzung und deren Phasenlage?

Hierzu Darstellung des sogenannten:
- Amplitudengangs (Verhältnis el. Größen $= f(f)$)
- Phasengangs (Phasenlage el. Gr. zw. E./Ausg. $= f(f)$)

$\Rightarrow$ Lösung: zB. Spannungsteilerregel, komplex ... aufstellen ...,

umformen

$$\boxed{\frac{\underline{u}_2}{\underline{u}_1} = \underbrace{A(\omega)}_{\text{Amplitudengang (Betrag)}} \cdot e^{j \cdot \underbrace{\varphi(\omega)}_{\text{Phasengang (Phase)}}}}$$

in der bekannten Exp.-Form

es entstehen: Amplitudengang (Betrag) Phasengang (Phase) als die 2 Grafen der "komplexen Übertragungsfunktion"

Beide Funktionen werden im sog. "Bode-Diagramm" dargestellt, hierbei
- Amplituden- (bzw. Leistungs)-Verhältnisse in log.-Verhältnismaßen dB
- Frequenzachse in lg-Skalierung

Leistungsverhältnis $V_p = 10 \lg \frac{P_2}{P_1}$ dB $= 10 \lg \frac{U_2^2/R}{U_1^2/R}$ dB

Amplitudenverh. (zB. Spannung u) $V_u = 20 \lg \frac{U_2}{U_1}$ dB

(dB = Dezibel)

zB:

Größenverhältnis	10^{-3}	0,01	0,1	1	2	5	10	100	10^3	
als Leist.-Verh. V_p	-30	-20	-10	0	3,01	6,99	10	20	30	dB
als Spannungs Verh. V_u	-60	-40	-20	0	6,02	13,98	20	40	60	dB

häufig $V_u = \frac{1}{\sqrt{2}} = -3$ dB (Grenzfrequenz)

Vorteil der logarithm. Darstellung:
sehr großer Wertebereich (viele Größenordnungen) ist im Gegensatz zu linearer Skalierung günstig darstellbar!

(!) Unterscheid: zu beachten
- Logarithmierung nur dimensionsloser Größen zulässig!
- logarithmisch geteilte Achsenskalierung bei Grafen

Kenngröße Grenzfrequenz

trennt Frequenzbereiche, in denen unterschiedl. Verhalten des VP auftritt

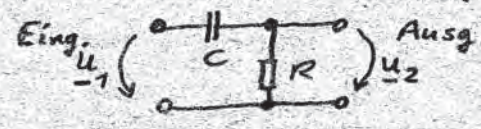
Def: bei der Grenzfrequ. gilt:

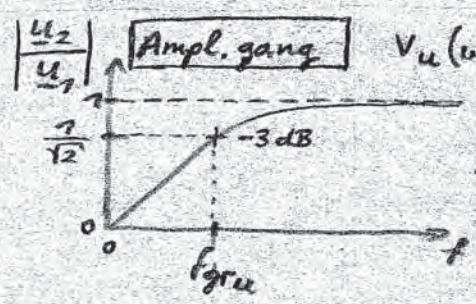
$$\boxed{\frac{V}{V_{Bezug}} = \left|\frac{\underline{u}_2(f_{gr})}{\underline{u}_{2\,Bezug}}\right| \overset{!}{=} \frac{1}{\sqrt{2}} = 0{,}707 = -3\,dB}$$

dh.: fällt die Verstärkung V bzw. die Ausgangsspannung bei Frequenzänderung auf das $1/\sqrt{2}$-fache ihres Bezugswertes, so heißt diese Frequ. Grenzfrequenz.
Der Bezugswert ist entweder der frequenzabh. Wert maximaler Verstärkung oder bei einfachen Übertragungsgliedern 1. Ordnung:

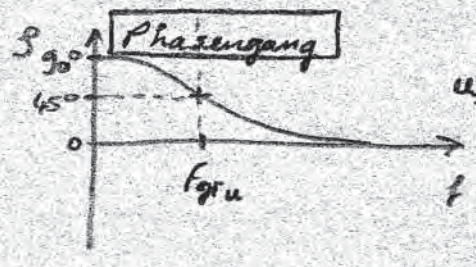
allg. gilt:

Hochpaßschaltung





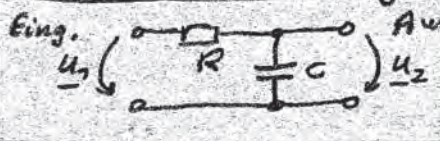
$V_u(\omega \to \infty) = 1 = 0\,dB$ als Bezugswert für untere Grenzfrequenz f_{gru}

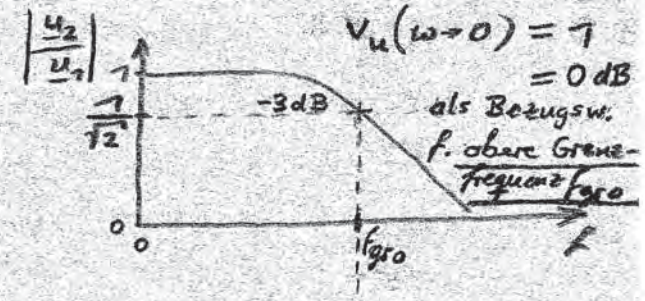


$\underline{u}_2$ "voreilend"

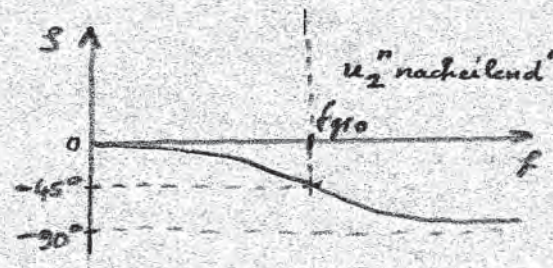
Die HP-Schaltung läßt nur Spannungen mit Frequenzen $> f_{gru}$ vom Eingang auf den Ausgang "passieren"!

Tiefpaßschaltung



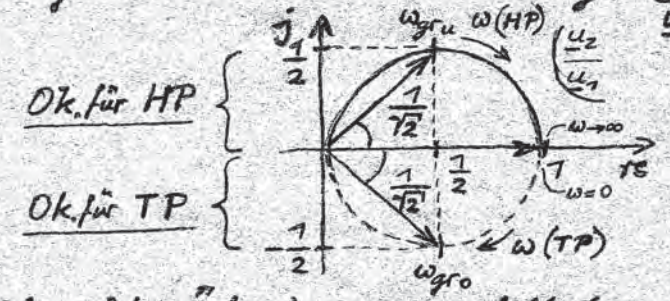


$V_u(\omega \to 0) = 1 = 0\,dB$ als Bezugsw. f. obere Grenzfrequenz f_{gro}



Die TP-Schaltung läßt nur Sp. mit Frequ. $< f_{gro}$ vom Eing. auf den Ausgang "passieren"!

Vgl. zur Ortskurvendarstellung: $\frac{\underline{u}_2}{\underline{u}_1} = f(\omega)$ aus Spannungsteilersatz und Invertierung des Nenner-ausdrucks (vgl. S. 41)



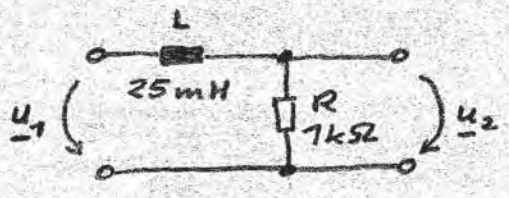
$\omega_{gru,o}$ = 45°-Frequenz bei $Re\left\{\frac{\underline{u}_2}{\underline{u}_1}\right\} = Im\left\{\frac{\underline{u}_2}{\underline{u}_1}\right\}$ und $\varphi = \pm 45°$

Charakt. Übertragungsverhältnisse:

für $f \to 0$ ↷ $\left|\frac{\underline{u}_2}{\underline{u}_1}\right|_{f=0}$ = "Gleichspannungs-Übertragungsverhältnis"

für $f \to \infty$ ↷ $\left|\frac{\underline{u}_2}{\underline{u}_1}\right|_{f\to\infty}$ = "Spngs.-Übertrag. verh. für hohe Frequenzen"

Beispiel: geg:



≙ Tiefpaßschaltung

ges: a.) $\frac{\underline{u}_2}{\underline{u}_1}$ (Amplitudengang u. Phasengang)

b.) Grenzfrequenz (hier f_{gr}) und Übertrag.verh. für $\omega \to 0$, $\omega \to \infty$

c.) Zahlenwertrechnung für Ampl.gang und Phasengang

a.) $$\frac{\underline{u}_2}{\underline{u}_1} = \frac{R}{R + j\omega L} = \frac{1}{1 + j\omega \frac{L}{R}}$$ Spannungsteiler $|:R$

$$= \underbrace{\frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega L}{R}\right)^2}}}_{\text{Amplitudengang}} \cdot e^{\underbrace{-j \arctan \frac{\omega L}{R}}_{\text{Phasengang}}}$$ Exponentialform

Vz.!

neg. φ: u_2 nacheilend gegenüber u_1

b.) f_{gr}: $$\left|\frac{\underline{u}_2}{\underline{u}_1}\right| \overset{!}{=} \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega L}{R}\right)^2}}$$

$$2 = 1 + \left(\frac{\omega L}{R}\right)^2 \curvearrowright \omega = \omega_{gr} = \frac{R}{L} = 40 \cdot 10^3\ s^{-1}$$

$$f_{gr} = \frac{\omega_{gr}}{2\pi} = 6{,}37\ kHz$$

$$\left|\frac{\underline{u}_2}{\underline{u}_1}\right|_{\omega=0} = 1 \quad \text{und} \quad \left|\frac{\underline{u}_2}{\underline{u}_1}\right|_{\omega\to\infty} = 0 \longrightarrow \text{TP-Verhalten!}$$

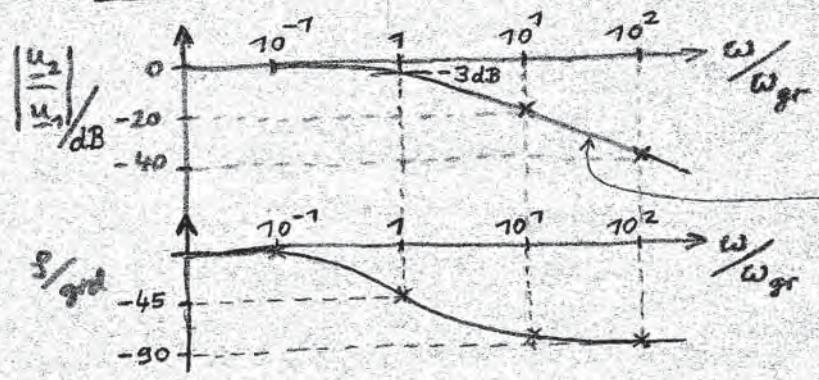
c.)

ω/ω_{gr}	10^{-1}	1	10^1	10^2
$\left\lvert\frac{\underline{u}_2}{\underline{u}_1}\right\rvert$	1,00 ≙ 0 dB	0,71 -3 dB	0,10 -20 dB	0,01 -40 dB
φ	-5,73°	-45°	-84,22°	-89,43°

$$\left|\frac{\underline{u}_2}{\underline{u}_1}\right| = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_{gr}}\right)^2}}$$ wobei $\omega_{gr} = \frac{R}{L}$

$$\varphi = -\arctan \frac{\omega}{\omega_{gr}}$$

Bode-Diagramm Darstellung:



(in logarithm. Skalierung)

Amplitudengang

neg. Steigung von -20 dB/Dekade ist typisch für eine TP-Schaltung 1. Ordnung

Phasengang

Darstellung periodischer Funktionsverläufe durch Fourier-Reihen (Harmonische Analyse)

Nach dem frnz. Math. Fourier ist jede mit der Periodendauer T_0 periodische Funktion

$$f(t) = f(t + kT_0)$$

unter Erfüllung der Dirichlet'schen Bedingungen (Endlichkeit, Stetigkeit, Monotonie)

in eine <u>Fourier-Reihe</u>, dh. eine Σ von sin- und cos-Funktionen und u.U. ein Gleichglied C_0 zerlegbar:

$$\boxed{f(t) = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \hat{A}_n \cos n\omega_0 t + \sum_{n=1}^{\infty} \hat{B}_n \sin n\omega_0 t}$$

mit der Grundschwingung $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$ (niedrigste Frequenz) und Schwingungen ganzzahlig höherer Frequenzen, $n = 1, 2, \ldots k$

<u>Bestimmung Gleichglied</u> $C_0 = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} f(t)\, dt$ (= Arithmetischer Mittelwert der Fktn.)

<u>Bestimmung der Amplitudenwerte</u> der Teilschwingungen

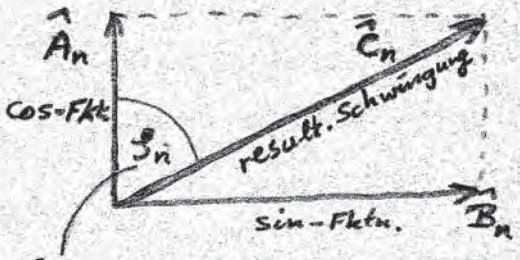
$$\hat{A}_n = \frac{2}{T_0} \int_{T_0} f(t) \cos n\omega_0 t \cdot dt$$

für die cos-Fktnen wobei $\hat{A}_0 = 2C_0$, dh. $C_0 = \frac{\hat{A}_0}{2}$

$$\hat{B}_n = \frac{2}{T_0} \int_{T_0} f(t) \sin n\omega_0 t \cdot dt$$

für die sin-Fktnen

Nicht immer müssen bei der Entwicklung der Fourier-Reihe cos- <u>und</u> sin-Schwingungsanteile gleichzeitig für <u>eine</u> Frequenz auftreten! Sollte dies der Fall sein, so lassen sich gleichfrequente Anteile zusammenfassen:



Resultierende Schwingung eilt der cos-Schwingung um Phasen ∡ φ_n nach

<u>Resultierende Schwingung</u> folgt aus:

$$\hat{A}_n \cos n\omega_0 t + \hat{B}_n \sin n\omega_0 t = \hat{C}_n \cos(n\omega_0 t - \varphi_n)$$

Amplitude: $\boxed{\hat{C}_n = \sqrt{\hat{A}_n^2 + \hat{B}_n^2}}$

Phase: $\boxed{\varphi_n = \arctan \frac{\hat{B}_n}{\hat{A}_n}}$

Die Frequenz mit $n=1$, $\omega=\omega_0$ heißt <u>Grundschwingung</u> bzw. 1. Harmonische

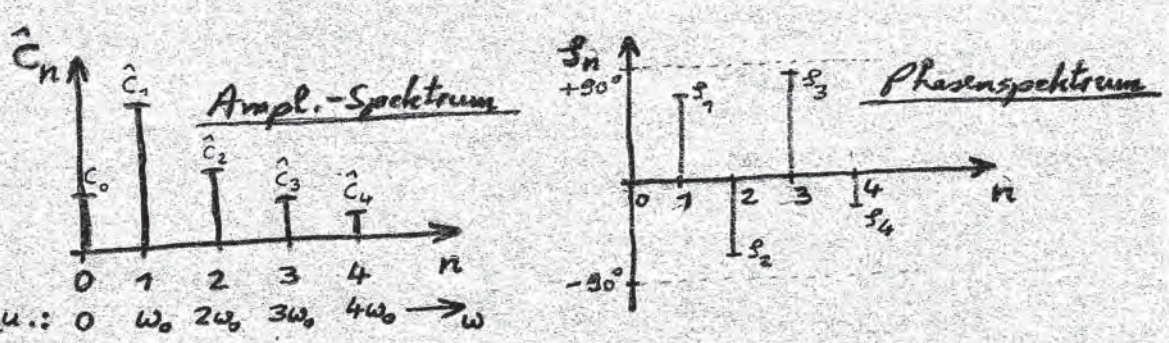
Frequenzen mit $n=2,3\ldots$ heißen 1., 2. <u>Oberschwingung</u> ... bzw. 2., 3. Harmonische ...

mit $\hat{C}_n$ und φ_N folgt die

Spektral-darstellung
$$\boxed{f(t)=C_0+\sum_{n=1}^{\infty}\hat{C}_n\cdot\cos(n\omega_0 t-\varphi_n)}$$

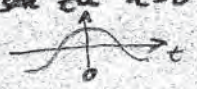
Damit ist die Darstellung einer periodischen Fktn. (im Zeitbereich) als Amplituden- und Phasenspektrum <u>im Frequenzbereich</u> möglich:

Darst.-beispiel:



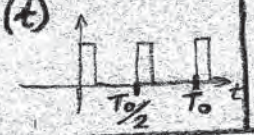
<u>Vereinfachungen zur Berechnung:</u>

- für Funktionen $f(t)$ symmetrisch zu $t=0$ ⇝ Reihe enthält <u>nur</u> cos-Glieder



- —"— $f(-t)=-f(t)$, ungerade Fktn. ⇝ <u>nur</u> sin-Glieder

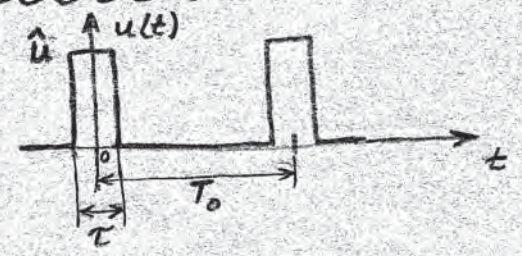
- ist $f(t)$ eine sich bereits nach $T_0/2$ positiv wiederholende Fktn., $f\left(t+\frac{T_0}{2}\right)=f(t)$ ⇝ ex. nur <u>geradzahlige Harmonische</u> $n=2,4,6,\ldots$



Eine Verschiebung der Fktn. auf der Zeitachse wirkt sich <u>nur</u> im Phasenspektrum aus! ⇝ günstiger Ansatz für Ampl.Spektrum-Berechnung frei wählbar...

Beispiel:

<u>geg.:</u>



<u>Vorbetrachtung:</u>

- nur Integrationsgrenzen $-\frac{\tau}{2}$, $+\frac{\tau}{2}$ erforderlich, (sonst $u=0$)
- da symmetrische Fktn. ⇝ <u>nur</u> cos-Glieder zu bestimmen

Harmonische

$$\underline{\underline{\hat{C}_n = \hat{A}_n}} = \frac{2}{T_0}\int_{-\frac{\tau}{2}}^{+\frac{\tau}{2}} \hat{u}\cdot\cos n\omega_0 t\cdot dt = \frac{2\hat{u}}{n\underbrace{\omega_0 T_0}_{=2\pi}}\sin n\omega_0 t\Big|_{-\frac{\tau}{2}}^{+\frac{\tau}{2}}$$

$\sin(-x) = -\sin x$

$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$

$$= \frac{\cancel{2}\hat{u}}{n\cdot\cancel{2}\pi}\cdot 2\sin\frac{n\omega_0\tau}{2}$$

$$\underline{\underline{\hat{C}_n = \frac{2\hat{u}}{n\pi}\cdot\sin n\pi\frac{\tau}{T_0}}}$$

Gleichglied $\underline{\underline{C_0}} = \frac{1}{T_0}\int_{-\frac{\tau}{2}}^{+\frac{\tau}{2}} f(t)\,dt = \underline{\underline{\frac{1}{T_0}\hat{u}\cdot\tau}}$

Spektraldarstellung (Fourier-Reihe)

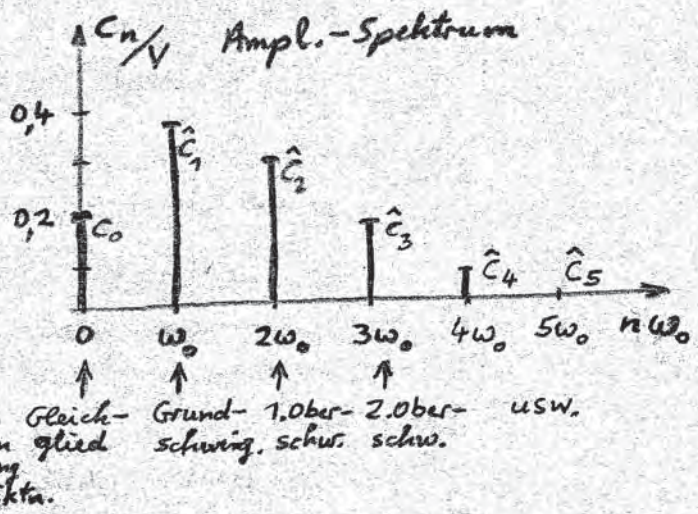
$$\underline{\underline{u(t) = \underbrace{\hat{u}\frac{\tau}{T_0}}_{\text{Gleichglied } C_0} + \frac{2\hat{u}}{\pi}\left(\sin\pi\frac{\tau}{T_0}\cdot\cos\omega_0 t + \frac{\sin 2\pi\frac{\tau}{T_0}}{2}\cdot\cos 2\omega_0 t + \ldots\right)}}$$

Grundschwingung $n=1$ — 1. Oberschwingung $n=2$ — ...usw.!

Zahlenrechnung:

für $\frac{\tau}{T_0} = \frac{1}{5}$ und $\hat{u} = 1V$ wird:

Gleichglied:	$C_0 = 0{,}2$ V
Grundschwing.:	$\hat{C}_1 = 0{,}37$ V
1. Oberschwing.:	$\hat{C}_2 = 0{,}30$ V
2. Oberschwing.:	$\hat{C}_3 = 0{,}20$ V
3. —"—	$\hat{C}_4 = 0{,}09$ V
4. —"—	$\hat{C}_5 = 0$ V (!)
5. —"—	$\hat{C}_6 = -0{,}06$ V } Phasendrehung cos-Fktn.
6. —"—	$\hat{C}_7 = -0{,}09$ V }



Die folg. Seite zeigt die Original Fktn. (Rechteckfktn.) und die Approximation durch die Überlagerung von cos-Funktionen bis zur 2. Oberschwingung (Add. der zeitl. Momentanwerte)

⇒ Exakte Nachbildung von $u(t)$ nur durch ∞-liche Reihe, dh. $n \to \infty$ möglich!

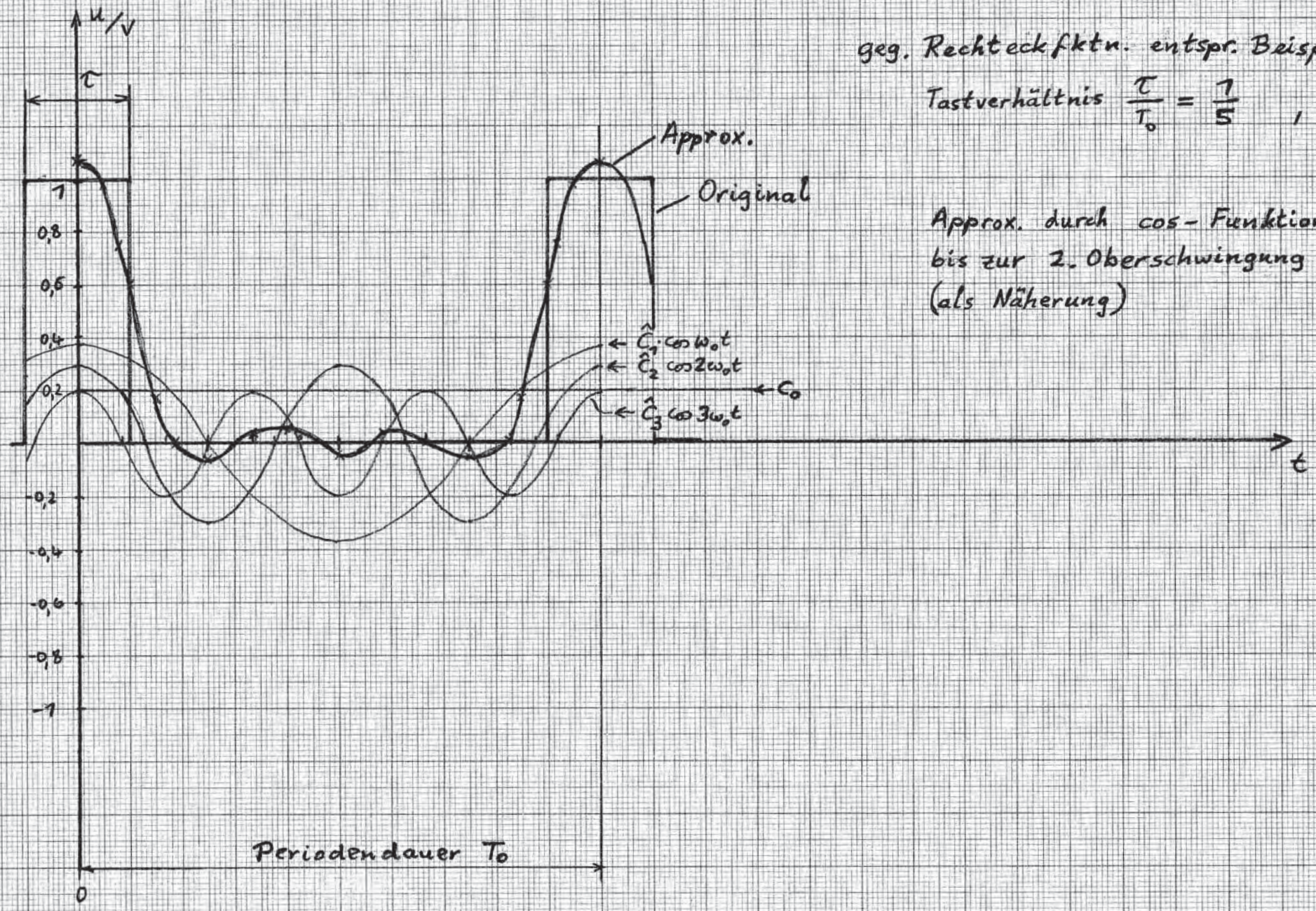
Bem: unter Nutzung der Eulerschen Beziehung lassen sich diese trigonometrischen Fktnen auch in der komplexen Form darstellen...!

Der Übergang von F.-Reihe zum Fourier-Integral (Fouriertransformation) ist der Einstieg in die elektr. Signal-/Systemtheorie...

geg. Rechteckfktn. entspr. Beispiel:

Tastverhältnis $\frac{\tau}{T_0} = \frac{1}{5}$, $\hat{u} = 1V$

Approx. durch cos-Funktionen nur bis zur 2. Oberschwingung (als Näherung)



[Ende]

A 4 210 x 297 mm
MADE IN GERMANY