Dr. Dirk Hecht
Institut für Allgemeine Elektrotechnik
Stand: November 2020

Gradient, Divergenz und Rotation - ganz kurz

(Bemerkung: Alle Ausdrücke werden in kartesischen Koordinaten dargestellt. Bei Zylinder- bzw. Kugelkoordinaten ergeben sich andere Ausdrücke. → Hilfsblätter)

Der NABLA - Operator

Die Verwendung des NABLA-Operators erweist sich als nützlich bei der Definition und Berechnung der vektoranalytischen Ausdrücke Gradient, Divergenz und Rotation. Er ist folgendermaßen definiert:

$$\nabla = \vec{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \vec{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \vec{e}_z \frac{\partial}{\partial z}$$

Der NABLA-Operator ist ein Differentialoperator, der Vektoreigenschaften besitzt.

Der Gradient

Der Gradient einer skalaren Funktion $\varphi(x, y, z)$, geschrieben grad φ oder $\nabla\varphi$ ist durch

$$\operatorname{grad}\varphi = \nabla\varphi = \left(\vec{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \vec{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \vec{e}_z \frac{\partial}{\partial z}\right)\cdot\varphi = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\vec{e}_x + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\vec{e}_y + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\vec{e}_z\right)$$

definiert. Bei der Gradientenbildung wird der NABLA-Operator auf eine <u>skalare</u> Funktion angewendet, das Ergebnis $\nabla\varphi$ ist ein <u>Vektor</u>. Der Gradient eines skalaren Feldes zeigt in die Richtung seines stärksten Anstieges.

Die Divergenz

Gegeben sei das Vektorfeld $\vec{B}(x,y,z)$. Die Divergenz dieses Vektorfeldes, geschrieben $\operatorname{div}\vec{B}$ oder $\nabla\cdot\vec{B}$ ist durch

$$\operatorname{div}\vec{B} = \nabla\cdot\vec{B} = \left(\vec{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \vec{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \vec{e}_z \frac{\partial}{\partial z}\right)\cdot\left(B_x\vec{e}_x + B_y\vec{e}_y + B_z\vec{e}_z\right) =$$

$$= \frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z}$$

definiert.

Hier wird der NABLA-Operator auf ein Vektorfeld angewendet, das Ergebnis ist ein Skalar. Die Divergenz ist ein Maß für die Quellendichte eines Vektorfeldes.

Die Rotation

Gegeben sei das Vektorfeld $\vec{H}(x, y, z)$. Die Rotation von $\vec{H}$, geschrieben $\operatorname{rot}\vec{H}$ oder $\nabla\times\vec{H}$ ist in kartesischen Koordinaten definiert durch:

$$\operatorname{rot}\vec{H} = \nabla\times\vec{H} = \left(\vec{e}_x\frac{\partial}{\partial x} + \vec{e}_y\frac{\partial}{\partial y} + \vec{e}_z\frac{\partial}{\partial z}\right) \times \left(H_x\vec{e}_x + H_y\vec{e}_y + H_z\vec{e}_z\right) =$$

$$= \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ H_x & H_y & H_z \end{vmatrix} = \vec{e}_x\left(\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z}\right) + \vec{e}_y\left(\frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x}\right) + \vec{e}_z\left(\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y}\right) .$$

Bei der Bildung der Rotation wird der NABLA-Operator auf ein Vektorfeld angewendet, die Rotation dieses Vektorfeldes ist wiederum ein Vektorfeld. Die Rotation ist ein Maß für die Wirbeldichte eines Vektorfeldes.

Fundamentalsatz der Vektoranalysis

Der Fundamentalsatz der Vektoranalysis, auch **Helmholtzscher Zerlegungssatz** genannt, beschreibt den allgemeinen Fall, dass sich jedes Vektorfeld $\vec{F}$ als eine Überlagerung eines (wirbelfreien) Quellenfeldes $\vec{F}_Q$ und eines (quellenfreien) Wirbelfeldes $\vec{F}_W$ beschreiben lässt:

$$\vec{F} = \vec{F}_Q + \vec{F}_W \quad .$$

Ein allgemeines Vektorfeld ist bezüglich seiner physikalischen Bedeutung daher nur dann eindeutig spezifiziert, wenn sowohl Aussagen über die Quellen- als auch Wirbeldichten und ggf. die notwendigen Randwerte vorliegen.