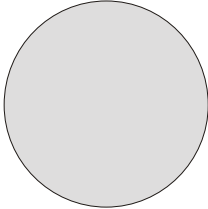
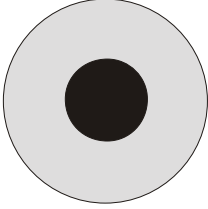
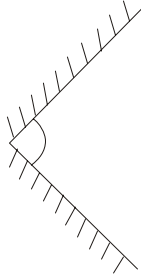
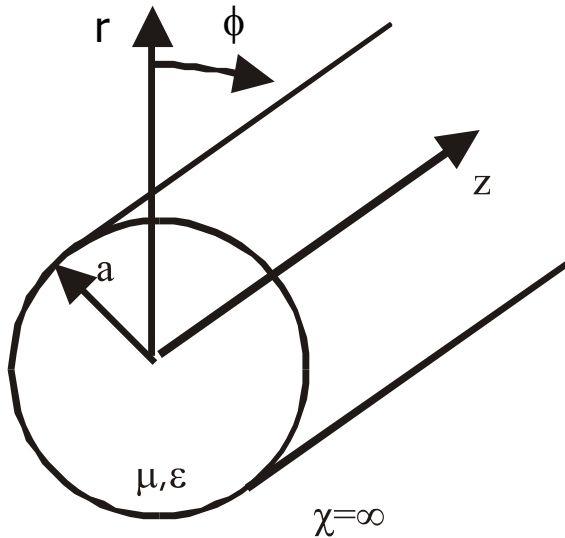


Kriterien zur Auswahl der Zylinderfunktionen

	Rundhohlleiter	Koaxialleiter	Sektorhorn
Wellenleiter			
M	M ganzzahlig		M ist vom Winkel 'alpha' Abhängig
Zylinder-Funktion	J_M	$AJ_M + BN_M$	Einstrahlung: $H_M^{(1)}$ Ausstrahlung: $H_M^{(2)}$

Wellentypen im Rundhohlleiter



$$\vec{A} = A \vec{e}_z \quad \text{mit}$$

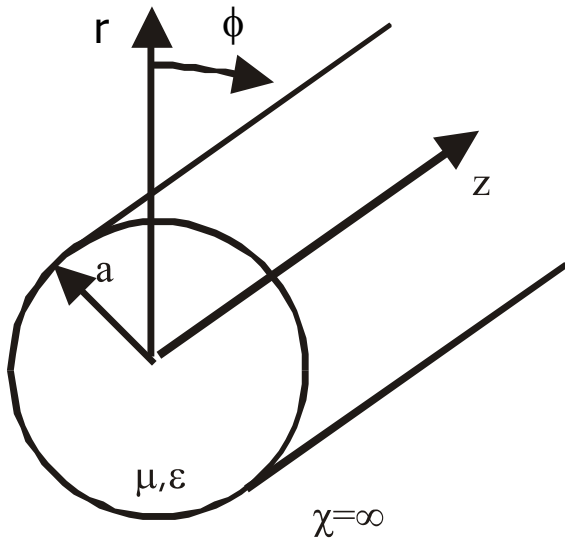
$$A = Z_m(Kr) \begin{Bmatrix} \sin m\varphi \\ \cos m\varphi \end{Bmatrix} e^{\pm jk_z z}$$

und der Separationsgleichung

$$k^2 = K^2 + k_z^2$$

Wellentypen im Rundhohlleiter

Welle in +z-Richtung:



$$\vec{A} = A \vec{e}_z \quad \text{mit}$$

$$A = C J_m(Kr) \cos(m\phi) e^{-jk_z z}$$

und

$$k_z = \sqrt{k^2 - K^2}$$

TM_{zmn}-Wellen

$$H_r = \frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial \varphi} = -C \frac{m}{r} J_m(Kr) \sin m\varphi e^{-jk_z z}$$

$$H_\varphi = -\frac{\partial A_z}{\partial r} = -CK J'_m(Kr) \cos m\varphi e^{-jk_z z}$$

$$E_r = -\frac{1}{j\omega\epsilon} \frac{\partial H_\varphi}{\partial z} = -C \frac{k_z}{\omega\epsilon} K J'_m(Kr) \cos m\varphi e^{-jk_z z}$$

$$E_\varphi = \frac{1}{j\omega\epsilon} \frac{\partial H_r}{\partial z} = C \frac{k_z}{\omega\epsilon} \frac{m}{r} J_m(Kr) \sin m\varphi e^{-jk_z z}$$

$$E_z = \frac{K^2}{j\omega\epsilon} A_z = C \frac{K^2}{j\omega\epsilon} J_m(Kr) \cos m\varphi e^{-jk_z z}$$

Nullstellen der Besselfunktion

		m			
jmn		0	1	2	3
	1	2.405	3.832	5.136	6.380
	2	5.520	7.016	8.417	9.761
	3	8.654	10.173	11.620	13.015

Nullstellen

von

J_{mn}

TM_{zmn}-Wellen

$$H_r = -C \frac{m}{r} J_m \left(j_{mn} \frac{r}{a} \right) \sin m \varphi e^{-jk_z z}$$

$$H_\varphi = -C \frac{j_{mn}}{a} J'_m \left(j_{mn} \frac{r}{a} \right) \cos m \varphi e^{-jk_z z}$$

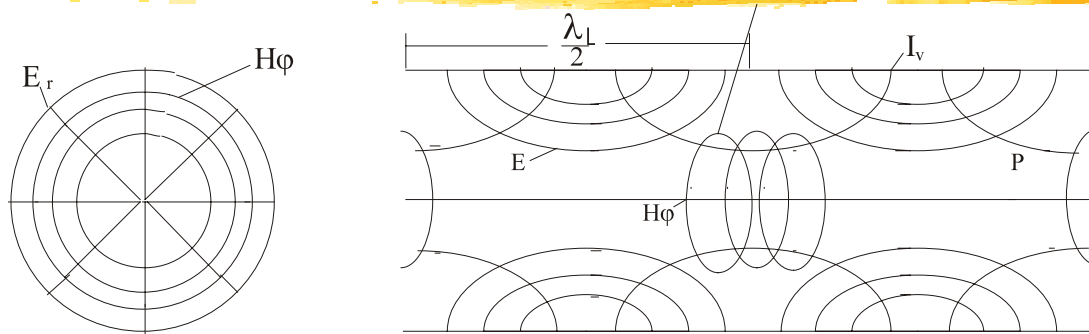
$$E_r = -C Z^E \frac{j_{mn}}{a} J'_m \left(j_{mn} \frac{r}{a} \right) \cos m \varphi e^{-jk_z z}$$

$$E_\varphi = C Z^E \frac{m}{r} J_m \left(j_{mn} \frac{r}{a} \right) \sin m \varphi e^{-jk_z z}$$

$$E_z = C \left(\frac{j_{mn}}{a} \right)^2 \frac{1}{j\omega\epsilon} J_m \left(j_{mn} \frac{r}{a} \right) \cos m \varphi e^{-jk_z z}$$

mit der Separationsgleichung $k_z^2 = k^2 - \left(\frac{j_{mn}}{a} \right)^2$

TM_{z01}-Welle



$$H_\phi = -C \frac{j_{01}}{a} J'_{01} \left(j_{01} \frac{r}{a} \right) e^{-jk_z z}$$

$$E_r = -C Z^E \frac{j_{01}}{a} J'_{01} \left(j_{01} \frac{r}{a} \right) e^{-jk_z z}$$

$$E_z = C \left(\frac{j_{01}}{a} \right)^2 \frac{1}{j\omega\epsilon} J_0 \left(j_{01} \frac{r}{a} \right) e^{-jk_z z}$$

TE_{zmn}-Wellen

$$E_r = \frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial \varphi} = - C \frac{m}{r} J_m(Kr) \sin m \varphi e^{-jk_z z}$$

$$E_\varphi = - \frac{\partial A_z}{\partial r} = C K J'_m(Kr) \cos m \varphi e^{-jk_z z}$$

$$H_r = \frac{1}{j\omega\mu} \frac{\partial E_\varphi}{\partial z} = C \frac{k_z}{\omega\mu} K J'_m(Kr) \cos m \varphi e^{-jk_z z}$$

$$H_\varphi = - \frac{1}{j\omega\mu} \frac{\partial E_r}{\partial z} = - C \frac{k_z}{\omega\mu} \frac{m}{r} J_m(Kr) \sin m \varphi e^{-jk_z z}$$

$$H_z = - \frac{K^2}{j\omega\mu} A_z = - C \frac{K^2}{j\omega\mu} J_m(Kr) \cos m \varphi e^{-jk_z z}$$

Nullstellen der 1. Ableitung der Besselfunktion

		m				
j'_{mn}		0	1	2	3	
n	1	3.832	1.841	3.054	4.201	Nullstellen
	2	7.016	5.331	6.706	8.015	von
	3	10.173	8.536	9.969	11.346	J'_{mn} (Ableitung v. J_{mn})

TE_{zmn}-Wellen

$$E_r = -C \frac{m}{r} J_m \left(j'_m \frac{r}{a} \right) \sin m \varphi e^{-jk_z z}$$

$$E_\varphi = -C \frac{j'_{mn}}{a} J'_m \left(j'_{mn} \frac{r}{a} \right) \cos m \varphi e^{-jk_z z}$$

$$H_r = C \frac{1}{Z^H} \frac{j'_{mn}}{a} J'_m \left(j'_{mn} \frac{r}{a} \right) \cos m \varphi e^{-jk_z z}$$

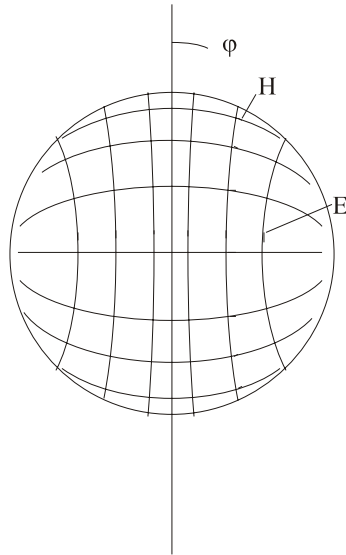
$$H_\varphi = -C \frac{1}{Z^H} \frac{m}{r} J_m \left(j'_{mn} \frac{r}{a} \right) \sin m \varphi e^{-jk_z z}$$

$$H_z = -C \left(\frac{j'_{mn}}{a} \right)^2 \frac{1}{j\omega\mu} J_m \left(j'_{mn} \frac{r}{a} \right) \cos m \varphi e^{-jk_z z}$$

mit der Separationsgleichung $k_z^2 = k^2 - \left(\frac{j'_{mn}}{a} \right)^2$

TE_{z11}-Welle

Grundwelle im Rundhohlleiter, $\omega_{c11}=1.841 \text{ c/a}$



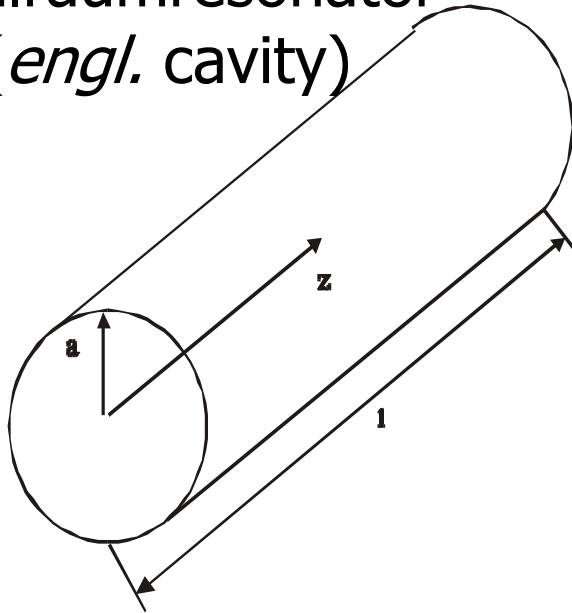
Wellentypen im Rundhohlleiter mit niedrigsten Grenzfrequenzen

$$\omega_{cmn} = j'_{mn} c/a$$

Nullstelle	Wellentyp
$j'_{11} = 1.841$	TE_{z11}
$j_{01} = 2.405$	TM_{z01}
$j'_{21} = 3.054$	TE_{z21}
$j'_{01} = 3.832$	TE_{z01}
$j_{11} = 2.405$	TM_{z11}

Kreiszyklindrische Resonatoren

Hohlraumresonator
(*engl. cavity*)



Resonanzfrequenzen der
Eigenschwingungen (Moden):

TM_z-Wellen:

$$\omega_{mnp} = c \sqrt{\left(\frac{j_{mn}}{a}\right)^2 + \left(\frac{p\pi}{L}\right)^2}$$

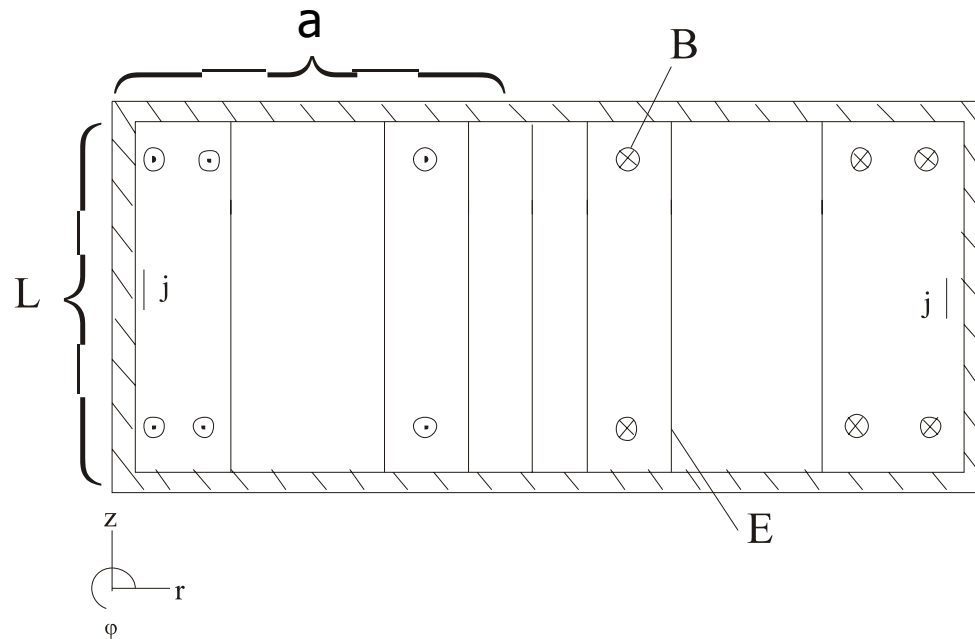
TE_z-Wellen:

$$\omega_{mnp} = c \sqrt{\left(\frac{j'_{mn}}{a}\right)^2 + \left(\frac{p\pi}{L}\right)^2}$$

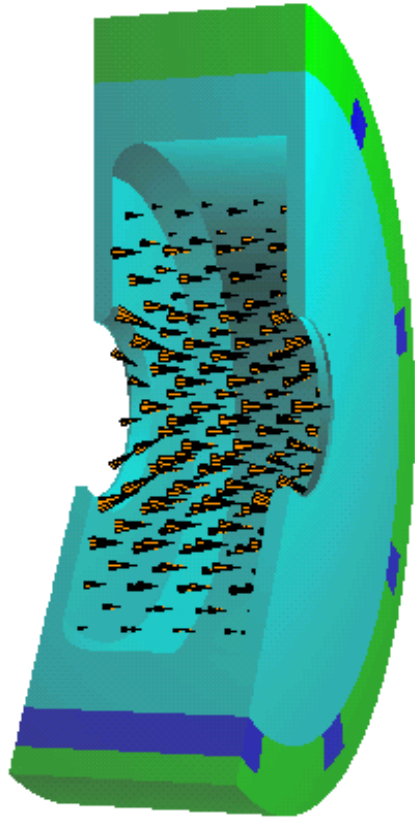
Stehwelle auch in z-Richtung

$$k_z = \frac{p\pi}{L}$$

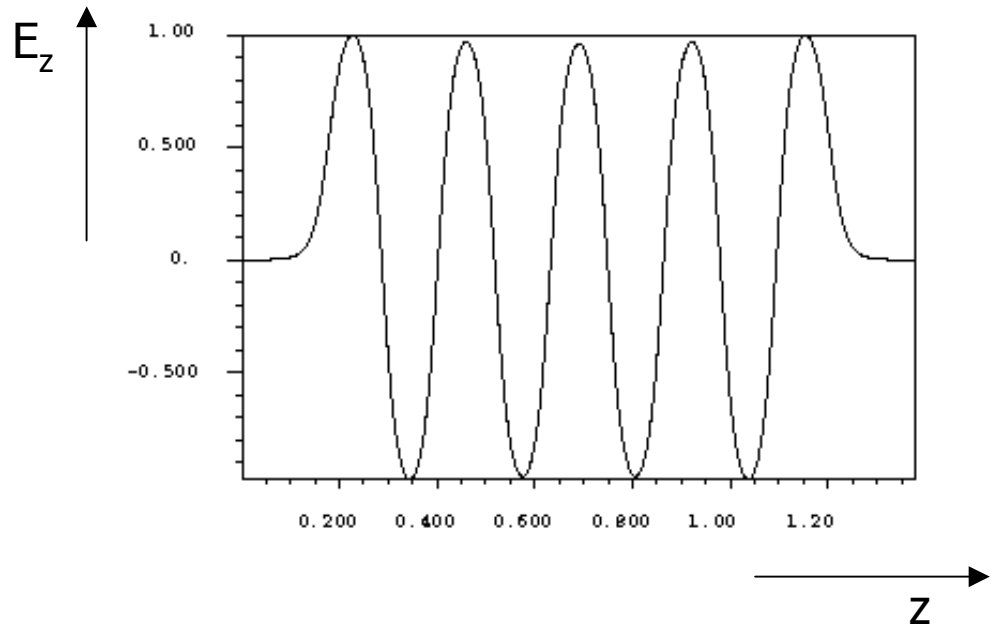
TM₀₁₀-Mode



TM₀₁₀-Mode und die Beschleunigung von Elektronen

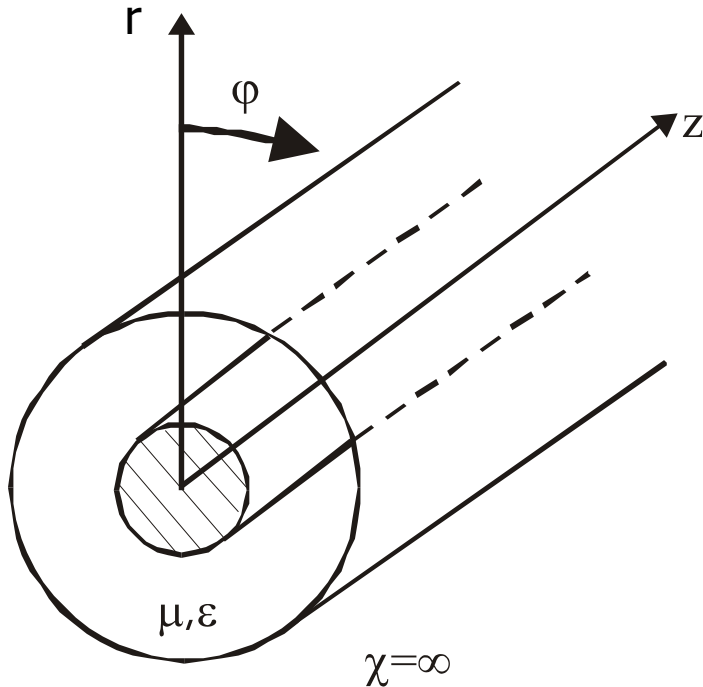


TESLA: $f = 1.3 \text{ GHz}$



SBLC: $f = 3 \text{ GHz}$

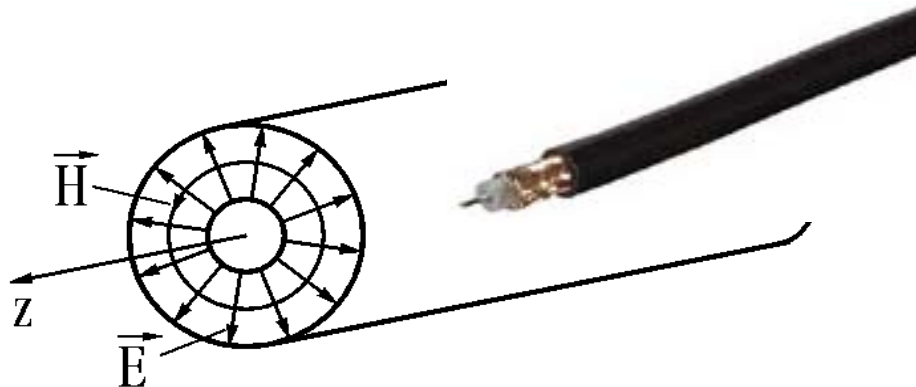
Koaxialleitung



Lösungsansatz mit
Bessel- und Neumannfunktionen

Koaxialleitung

- meist verwendete Leitung neben Zweidrahtleitung
- dominiert im HF-Bereich
- DC bis > 100 GHz
- Feld vollständig im Innern konzentriert
- nur mäßige Verluste
- nicht dispersiv (Phase ist lineare Funktion der Frequenz)
- viele verschiedene Bauformen



Koaxialleitung: TEM-Welle

Frage: Gibt es eine Welle ohne Grenzfrequenz ($\omega_c = 0$) ?

Für ω_c gilt $k_z = 0 \Rightarrow \omega_c = c \cdot \sqrt{K^2 + k_z^2} = c \cdot K = 0$

$\Rightarrow K = 0$ für die Welle ohne Grenzfrequenz.

Bessel'sche Differentialgleichung: $\frac{d^2 f}{dr^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{df}{dr} + \left(K^2 - \frac{m^2}{r^2} \right) f = 0$

Wegen $K = 0$ und $m = 0$: $\frac{d^2 f}{dr^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{df}{dr} = 0.$

Lösung:

$$f = C_1 \ln \frac{r}{C_2} \Rightarrow A_z = C_1 \ln \frac{r}{C_2} e^{-jkz} \quad (\text{i.a. } k^2 = K^2 + k_z^2, \text{ hier } K = 0)$$

TEM-Welle im Koaxialleiter

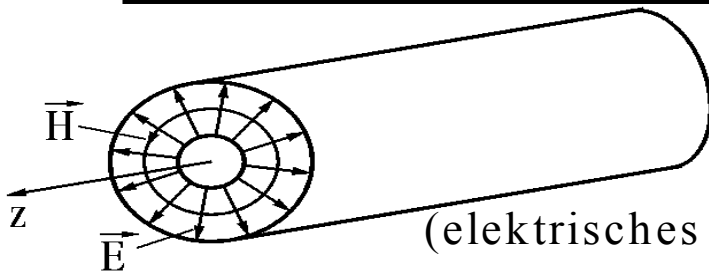
Aus $\mathbf{H} = \text{rot } \mathbf{A}$ ergeben sich die Feldkomponenten zu:

$$E_r = \frac{1}{r} E_0 \cdot e^{-jkz}$$

$$H_\varphi = \frac{1}{Z} E_r = \frac{1}{Z} \cdot \frac{1}{r} E_0 \cdot e^{-jkz} \quad \text{mit } Z = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}$$

$$E_\varphi = E_z = H_r = H_z = 0$$

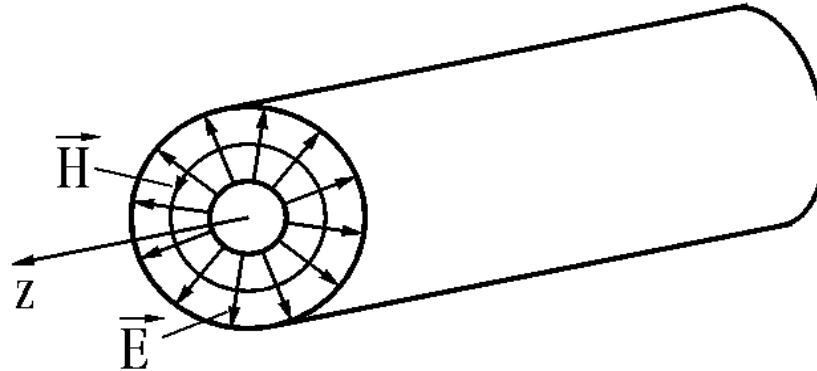
(Für $\mathbf{E} = \text{rot } \mathbf{A}$ verschwinden alle Feldkomponenten.)



TEM-Welle

(elektrisches und magnetisches Feld rein transversal)

TEM-Welle im Koaxialleiter



Im TEM-Fall ergibt sich aus der Wellengleichung die Laplace-Gleichung der Elektrostatik für A_z für die Transversalebene, d.h. die transversale Feldverteilung ist unabhängig von z .

In jedem ideal leitenden Mehrleitersystem ist die TEM-Welle als Grundwelle möglich.

TEM-Welle im Koaxialleiter

i.a. ist $\mu = \mu_0$ und damit

$$k_z = \omega \sqrt{\epsilon_0 \mu_0} \sqrt{\epsilon_r}$$

$$v_{ph} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0} \sqrt{\epsilon_r}} = \frac{c_0}{\sqrt{\epsilon_r}}$$

Wegen

$$\frac{1}{\lambda_0} = f \sqrt{\epsilon_0 \mu_0} = \frac{f}{c_0} \quad \text{und} \quad k_0 = \frac{2\pi}{\lambda_0}$$

ergibt sich

$$k_z = \frac{\omega}{v_{ph}} = k_0 \sqrt{\epsilon_r} \quad \text{für verlustlose Leitungen}$$

$$\left(\text{allg.: } k_z = k_0 \sqrt{\epsilon_r - j \epsilon_r \tan \delta} \right).$$

