

„Power-Loss“-Methode

Volumen Verluste $P_V = \frac{\omega}{2} \int \mu'' \|\vec{H}\|^2 dV + \frac{\omega}{2} \int \varepsilon'' \|\vec{E}\|^2 dV$

Flächen Verluste $P_A = \frac{1}{2} \int \operatorname{Re}\{Z_m\} \|\vec{H}\|^2 dA$

Wand Impedanz $Z_m = (1 + j) \sqrt{\frac{\omega \mu}{2 \kappa}}$

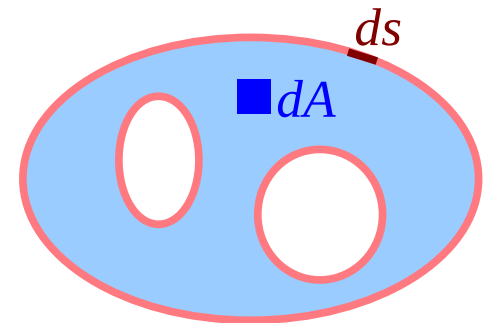
Resonator $Q = \frac{\omega W_{tot}}{P_A + P_V}$

Wellenleiter: Flächenverluste pro Längeneinheit

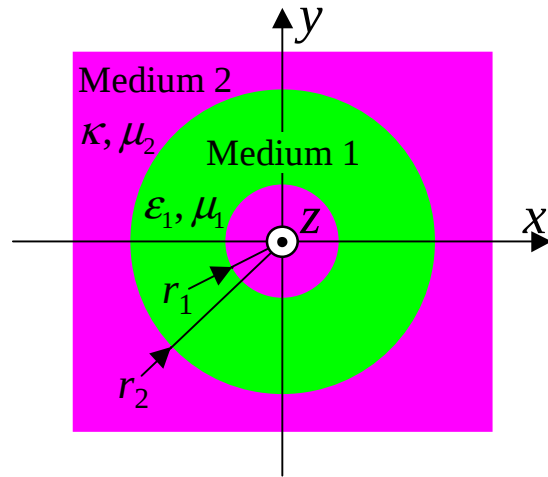
$$P'_A = \frac{1}{2} \int \operatorname{Re}\{Z_m\} \|\vec{H}\|^2 ds$$

transportierte Leistung $N = \frac{1}{2} \operatorname{Re}\left\{ \int \vec{E} \times \vec{H}^* dA \right\}$

Dämpfungsmaß $\alpha = \frac{1}{2} \frac{P'_A + P'_V}{N}$



Beispiel: TEM Welle im Koaxialleiter



$$\text{PEC Lösung: } E_r = \begin{cases} \frac{E_0}{r} \exp(-jk_1 z) & \text{für } r_1 < r < r_2 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$H_\varphi = \begin{cases} \frac{E_0}{Z_1 r} \exp(-jk_1 z) & \text{für } r_1 < r < r_2 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

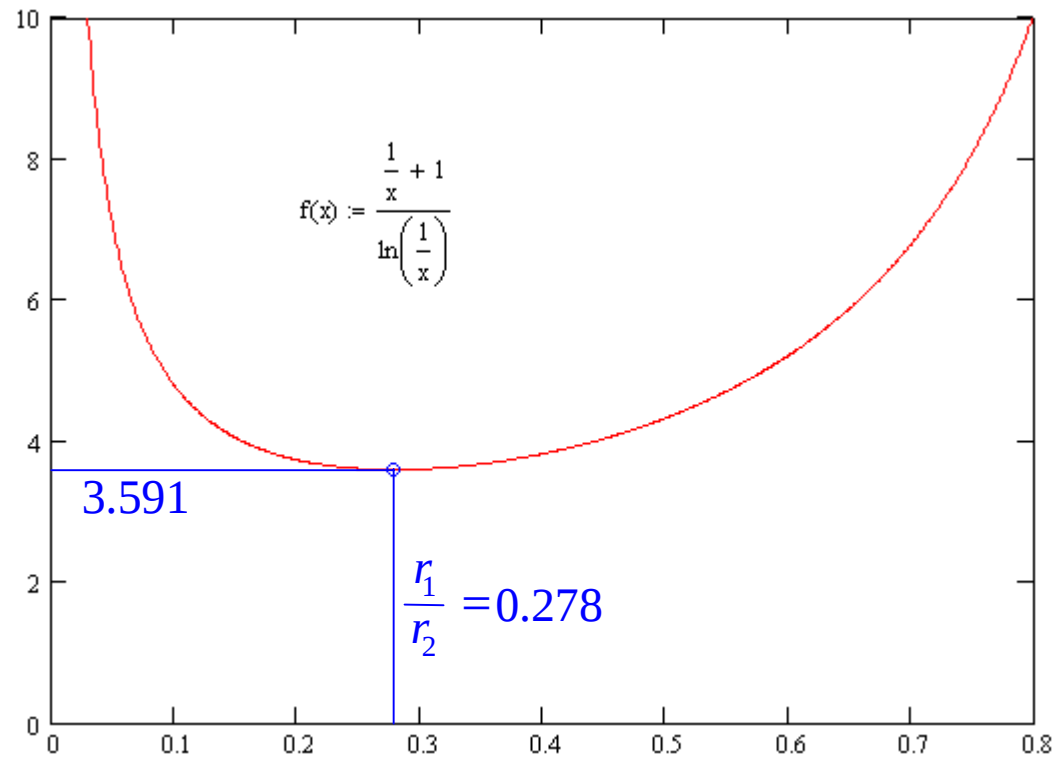
$$N = \text{Re} \left\{ \frac{1}{2} \int \vec{E} \times \vec{H}^* d\vec{A} \right\} = \frac{1}{2} \frac{|E_0|^2}{Z_1} \int_{r_1}^{r_2} \frac{1}{r^2} r d\varphi dr = \pi \frac{|E_0|^2}{Z_1} \ln(r_2/r_1)$$

$$P' = \frac{1}{2} \int \left(\sqrt{\frac{\omega \mu_2}{2\kappa}} |H_\varphi|^2 \right) ds = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\omega \mu_2}{2\kappa}} \frac{|E_0|^2}{Z_1^2} \left\{ \int_0^{2\pi} \int_{r_1}^{r_2} \frac{1}{r^2} r_1 d\varphi + \int_0^{2\pi} \int_{r_2}^{r_2} \frac{1}{r^2} r_2 d\varphi \right\} = \pi \sqrt{\frac{\omega \mu_2}{2\kappa}} \frac{|E_0|^2}{Z_1^2} \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right)$$

$$\alpha = \frac{1}{2} \frac{P'}{N} = \frac{k_1}{4} \frac{\mu_2}{\mu_1} \frac{\delta}{r_2} \frac{\frac{r_2}{r_1} + 1}{\ln(r_2/r_1)}$$

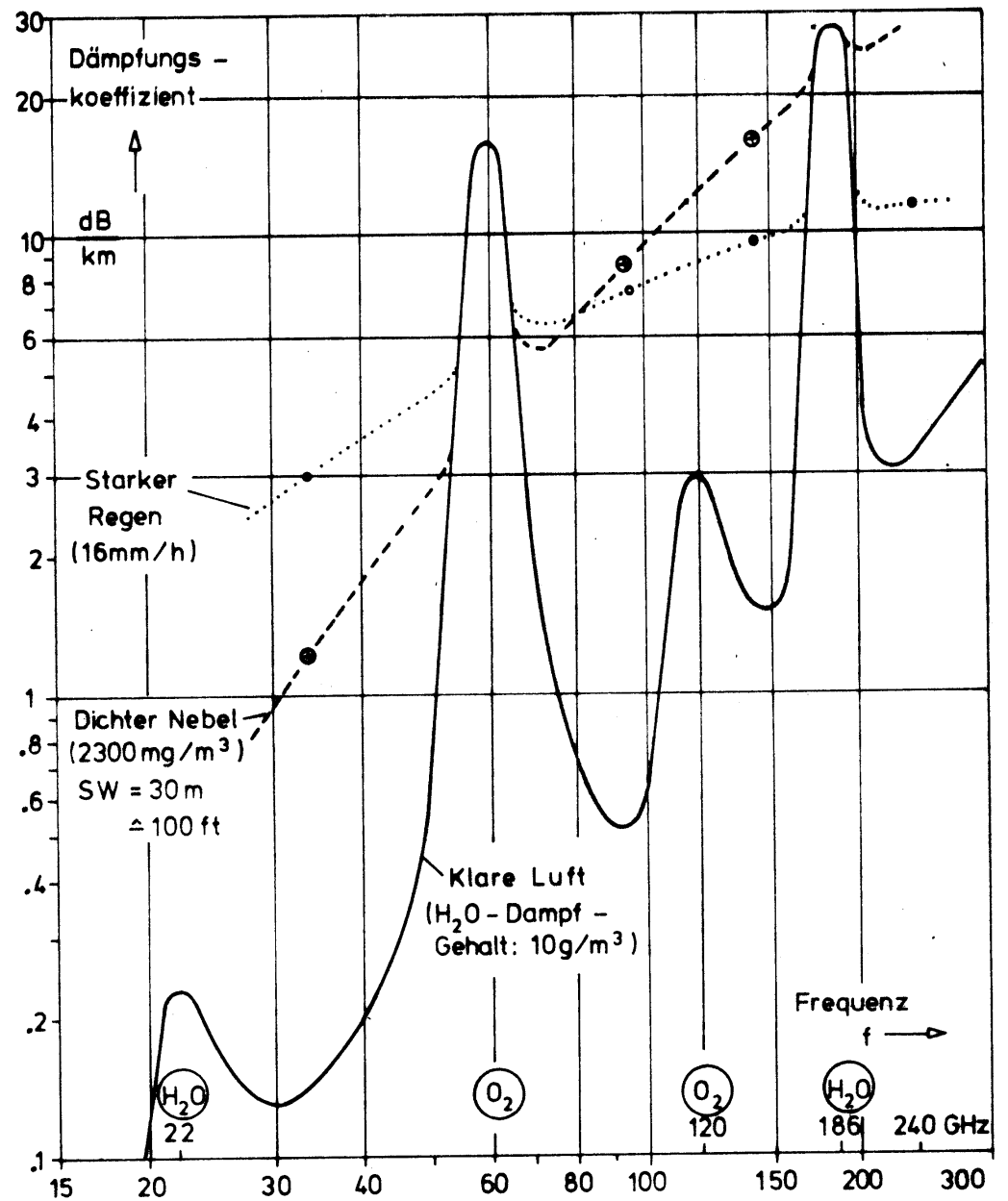
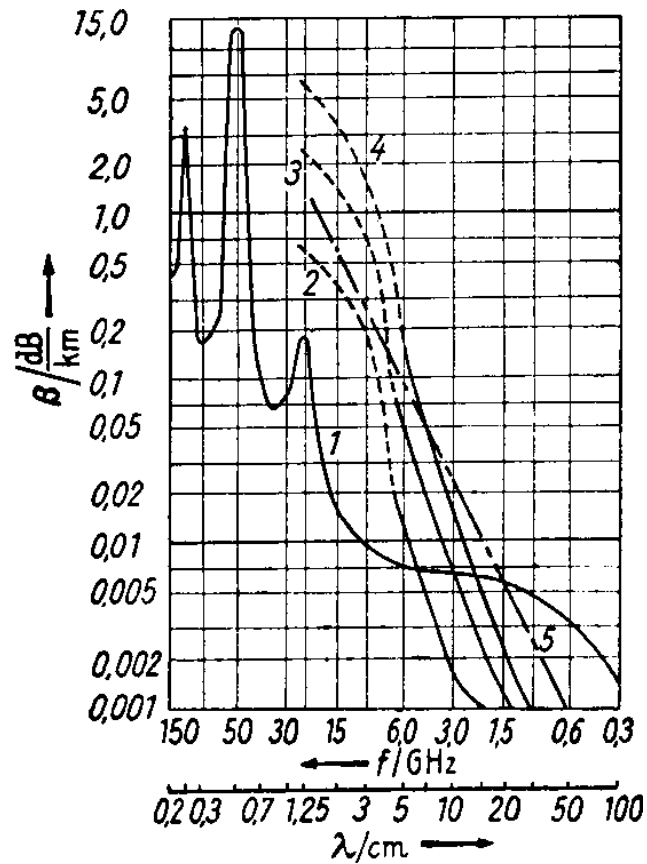
$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\omega \mu_2 \kappa}}$$

minimale Dämpfung: $\alpha \propto f(r_1/r_2)$ mit $f(x) = \frac{\frac{1}{x} + 1}{\ln(1/x)}$



minimales Feld : $\frac{r_1}{r_2} = 0.368$

Dämpfung durch die Atmosphäre



Freiraum Problem

homogenes Medium: $\varepsilon = \text{const}$

$$\mu = \text{const}$$

$$\kappa = 0$$

Quellen bekannt: $\rho, \vec{J}$ mit $\text{div} \vec{J} + \dot{\rho} = 0$

$$\rho_m, \vec{J}_m \quad \text{mit} \quad \text{div} \vec{J}_m + \dot{\rho}_m = 0$$

keine Quellen für $\|\vec{r}\| > R_q$

offene Randbedingungen: $\vec{E}, \vec{H} \propto \frac{1}{\|\vec{r}\|}$ für $\|\vec{r}\| \gg R_q$

$$\text{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon}$$

$$\text{rot} \vec{E} = -\mu \frac{\partial}{\partial t} \vec{H} - \vec{J}_m$$

$$\text{div} \vec{H} = \frac{\rho_m}{\mu}$$

$$\text{rot} \vec{H} = \varepsilon \frac{\partial}{\partial t} \vec{E} + \vec{J}$$

Wellengleichungen:

$$\rho_m = 0, \quad \vec{J}_m = \vec{0}:$$

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \vec{E} = \mu \frac{\partial}{\partial t} \vec{J} + \frac{1}{\varepsilon} \text{grad} \rho$$

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \vec{H} = -\text{rot} \vec{J}$$

$$\vec{E} = -\mu \frac{\partial}{\partial t} \vec{A} - \text{grad} \Phi$$

$$\vec{H} = \text{rot} \vec{A}$$

$$\text{Lorentz Eichung: } \text{div} \vec{A} = -\varepsilon \frac{\partial \Phi}{\partial t}$$

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \Phi = -\frac{\rho}{\varepsilon}$$

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \vec{A} = -\vec{J}$$

$$\rho = 0, \quad \vec{J} = \vec{0}:$$

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \vec{H} = \varepsilon \frac{\partial}{\partial t} \vec{J}_m + \frac{1}{\mu} \text{grad} \rho_m$$

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \vec{E} = \text{rot} \vec{J}_m$$

$$\vec{H} = \varepsilon \frac{\partial}{\partial t} \vec{A} + \text{grad} \Phi$$

$$\vec{E} = \text{rot} \vec{A}$$

$$\text{Lorentz Eichung: } \text{div} \vec{A} = -\mu \frac{\partial \Phi}{\partial t}$$

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \Phi = \frac{\rho_m}{\mu} = -\text{div} \vec{M}$$

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \vec{A} = \vec{J}_m = \mu \frac{\partial}{\partial t} \vec{M}$$

Analogien zwischen statischen und retardierten Potentialen

Die Potentialgleichung der Elektrostatik lautet:

$$\nabla^2 \Phi(\vec{r}_0) = -\frac{q_v(\vec{r}_0)}{\varepsilon}$$

mit der Lösung

$$\Phi(\vec{r}_0) = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \int_V \frac{q_v(\vec{r})}{|\vec{r} - \vec{r}_0|} dV$$

In der Magnetostatik ergibt sich für das Vektorpotential

$$\nabla^2 \vec{A}(\vec{r}_0) = -\vec{j}(\vec{r}_0)$$

mit der Lösung

$$\vec{A}(\vec{r}_0) = \frac{1}{4\pi} \int_V \frac{\vec{j}(\vec{r})}{|\vec{r} - \vec{r}_0|} dV$$

Die Wellengleichung der Elektrodynamik lautet:

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \Phi_{ret}(\vec{r}_0, t) = -\frac{q_v(\vec{r}_0, t)}{\varepsilon}$$

mit der Lösung

$$\Phi_{ret}(\vec{r}_0, t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \int_V \frac{q_v\left(\vec{r}, t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}_0|}{c}\right)}{|\vec{r} - \vec{r}_0|} dV$$

Laufzeitunterschied

In der Elektrodynamik ergibt sich für das Vektorpotential

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \vec{A}_{ret}(\vec{r}_0, t) = -\vec{j}(\vec{r}_0, t)$$

mit der Lösung

$$\vec{A}_{ret}(\vec{r}_0, t) = \frac{1}{4\pi} \int_V \frac{\vec{j}\left(\vec{r}, t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}_0|}{c}\right)}{|\vec{r} - \vec{r}_0|} dV$$

Laufzeitunterschied